

Paris
N°d'ordre : ****

UNIVERSITE DE PARIS-SUD - U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris XI - ORSAY

Spécialité : *Astrophysique et méthodes associées*

par

SANDRINE PIRES

Sujet :

**Application des méthodes multi-échelles
aux effets de lentille gravitationnelle faibles :
reconstruction et analyse des cartes de matière noire.**

A soutenir le 15 Décembre 2008 devant la Commission d'examen :

Mme.	S. BRIDLE	Rapporteur
M.	E. SLEZAK	Rapporteur
M.	M. G. PINEAU DES FORÊTS	Examineur
M.	E. THIÉBAUT	Examineur
Mme.	N. AGHANIM	Membre invité
M.	J.-L. STARCK	Directeur de thèse
M.	A. RÉFRÉGIER	Co-directeur de thèse

De toutes les sciences, l'Astrophysique n'est elle pas celle qui offre à l'Homme les plus belles possibilités d'accroître l'étendue de son savoir et de reculer les limites de ses pouvoirs : celle de se situer plus justement dans les espaces infinis qui l'entourent — *Jean-Claude Pecker*

Remerciements

Il y a environ 10 ans quand je préparais mon DEUG à l'Université d'Amiens, l'idée de faire une thèse en Astrophysique trottait déjà dans ma tête. Une succession d'événements ont failli me faire passer à côté de cette belle expérience. Un grand merci à tous ceux qui m'ont toujours encouragé dans cette direction je pense ici à Robert Bouzerar, à Michel Tallon... et surtout à Jean-Luc Starck à qui j'adresse une profonde reconnaissance pour avoir rendu cette expérience possible en me recrutant au sein du SEDI.

Je remercie donc vivement Jean-Luc S. pour avoir su encadrer et orienter ce travail de thèse avec beaucoup de compétence, de disponibilité et d'enthousiasme ; merci de m'avoir fait découvrir le monde merveilleux des ondelettes. Je tiens également à remercier Alexandre Réfrégier pour avoir co-encadré ce travail et pour avoir répondu à de nombreuses questions que je me suis posée en Cosmologie durant ces trois dernières années.

Je remercie ensuite Sarah Bridle et Eric Slezak d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce manuscrit. Je veux aussi remercier N. Aghanim, M. G. Pineau des Forêts et E. Thiébaud pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie aussi, tous ceux, sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est : merci à Florian P. et Joël B. pour m'avoir permis d'étoffer mes connaissances en astrophysique, merci à Alain G. et Pierrick A. pour leur aide en informatique, merci à Adam A. et Romain T. pour m'avoir aidé à me familiariser avec les simulations numériques. Un grand merci à Yassir M. pour m'avoir aidé à mieux comprendre les statistiques et pour toutes ces discussions fructueuses autour d'un café.

Je tiens également à remercier tout particulièrement tous les thésards, post-docs et autres (la liste est longue) avec qui j'ai partagé toutes mes pauses et mes repas, pour cette ambiance chaleureuse qui a fait de ces trois années un pur bonheur : Yann R., Nicolas P., Cedric L., Delphine M., Pascal G., Samuel C., Matthias G., Pierrick A., Savita M., Pascal L., Alain G., Krys L., Laurène J., Vincent D., Julien S., Yohan D., Fabio A., Clément B., Benoit C., Arnaud W., Jérôme B., Chiara M., Marco P., Carlos C, Sacha H., Maud G., Timea C., Henri T., Rafa G.... et ceux que j'oublie qui vont sûrement m'en vouloir...

Je remercie aussi mes compagnons de bureau successifs pour m'avoir tour à tour supporté : Adam A. pour sa perpétuelle bonne humeur, Anaïs R. pour m'avoir appris les subtilités de la langue anglaise... Merci d'avoir toléré mes accès de colère, de stress et de joie.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai à travailler au sein du Service d'Astrophysique et j'en remercie ici tous les membres. Un grand merci aussi au Service d'Electronique des Détecteurs et d'Informatique qui a su m'accueillir malgré mon éloignement géographique.

Merci aussi, à tous les membres de la section Volley sur qui je me suis défoulée pendant la période de rédaction et notamment à Dom, Nico, Michel, Lulu, Patosch, Steph, Caro pour m'avoir permis de m'évader certains midis.

Enfin, j'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin et qui a durement travaillé à la préparation du pot de soutenance. Pour finir, je remercie Renaud pour ses relectures assidues et son tendre soutien.

Résumé

La cosmologie moderne qui étudie l'Univers de manière scientifique repose sur l'existence d'un modèle qui cherche à décrire la géométrie et la dynamique de l'Univers. Ces dernières décennies, les observations ont montré que notre Univers était dominé par la présence de matière noire et d'énergie noire dont on ne connaît pas la nature.

L'effet de lentille gravitationnelle faible qui est directement sensible au potentiel gravitationnel est un des meilleurs outils disponibles actuellement pour cartographier la distribution de matière noire et imposer des contraintes sur le modèle cosmologique. Un grand nombre de relevés dédiés à la mesure du cisaillement gravitationnel, de plus en plus grands et de plus en plus précis, sont déjà prévus afin de répondre à la question de la nature de la matière noire et on espère également aborder le problème de l'énergie noire. Pour cela, un effort considérable est nécessaire pour améliorer les techniques d'analyse existantes.

Dans cette thèse, afin d'améliorer le traitement de ces données, nous proposons d'utiliser de nouvelles méthodes d'analyse : les méthodes multi-échelles, qui permettent de transformer le signal sous une forme permettant de mieux l'analyser. Nous nous sommes intéressés aux aspects de reconstruction et d'analyse des cartes de matière noire. Tout d'abord, nous proposons une méthode innovante qui permet de gérer les problèmes occasionnés par la présence de données manquantes. Ensuite, nous proposons une nouvelle méthode de filtrage qui permet de reconstruire la distribution de matière noire avec plus de précision. Enfin, nous introduisons une nouvelle statistique qui permet d'augmenter nos contraintes sur le modèle cosmologique.

Abstract

Modern cosmology refers to the physical study of Universe and is based on a cosmological model that deals with the structure of the Universe, its origins and its evolution. Over the last decades, observations have provide evidence for both dark matter and dark energy. Universe has been found to be dominated by these two components whose composition remains a mystery.

Weak gravitational lensing provides a direct way to probe dark matter and can be used to map the dark matter distribution. Furthermore, weak lensing effect is believed to be the more promising tool to understand the nature of dark matter and dark energy and then to constrain the cosmological model. New weak lensing surveys, more and more accurate, are already planned that will cover a large fraction of the sky. But a significant effort should be done to improve the current analyses.

In this thesis, in order to improve the weak lensing data processing, we suggest to use new methods of analysis : the multiscale methods, that make it possible to transform a signal in a way that facilitates its analysis. We have been interested in the reconstruction and analysis of the dark matter mass map. First, we have developed a new method to deal with the missing data. Second, we have suggested a new filtering method that makes the dark matter mass map reconstruction better. Last, we have introduced a new statistic to set tighter constraints in the cosmological model.

Table des matières

Remerciements	V
Résumé	VII
Abstract	IX
Table des figures	XV
Introduction	1
1 Cosmologie et lentilles gravitationnelles	5
1.1 Le cadre cosmologique	6
1.1.1 Relativité Générale et cosmologie	6
1.1.2 La matière noire	10
1.1.3 L'énergie noire	12
1.1.4 Conclusion	14
1.2 Les lentilles gravitationnelles	14
1.2.1 L'observation des effets de lentille gravitationnelle	14
1.2.2 La théorie des lentilles gravitationnelles	18
1.2.3 Les différents effets de lentille gravitationnelle	22
1.2.4 Conclusion	26
2 Les lentilles gravitationnelles faibles pour contraindre la cosmologie	29
2.1 Construction d'un catalogue de galaxies	30
2.1.1 Pré-traitement et erreurs systématiques	30
2.1.2 Estimation du cisaillement gravitationnel	32
2.2 Reconstruction de la carte de convergence	35
2.2.1 L'inversion au 1 ^{er} ordre	35
2.2.2 L'inversion au 2 ^{eme} ordre	39
2.2.3 Comparaison	40
2.3 Filtrage des cartes de convergence pour cartographier la matière noire	43
2.3.1 Les filtres linéaires standards	43
2.3.2 Un filtrage non-linéaire standard : MEM	46
2.4 Estimation de statistiques pour contraindre la cosmologie	48
2.4.1 Estimation de statistiques	48
2.4.2 Calcul du spectre et du bispectre à partir de la FFT polaire	52
2.4.3 Estimation de statistiques en présence de données manquantes	55
2.5 Conclusion	59

3	Introduction aux ondelettes et à l'analyse multi-échelles	61
3.1	La merveilleuse histoire des ondelettes	62
3.1.1	La transformation de Fourier	62
3.1.2	La transformation de Gabor ou transformation de Fourier glissante . .	62
3.1.3	Un peu d'histoire contemporaine	63
3.2	Les ondelettes et la parcimonie	65
3.2.1	A la recherche d'une représentation <i>parcimonieuse</i>	65
3.2.2	Le filtrage par les ondelettes	66
3.3	Le cadre mathématique et numérique des ondelettes	67
3.3.1	Le cadre mathématique	67
3.3.2	La transformation en ondelettes numérique	69
3.4	Les transformations bidimensionnelles	70
3.4.1	La transformation en ondelettes bi-orthogonale	70
3.4.2	La transformation en ondelettes isotrope non-décimée	72
3.4.3	La transformation en <i>ridgelets</i>	75
3.4.4	La transformation en <i>curvelets</i>	76
3.5	Conclusion	76
4	Interpolation des données manquantes	79
4.1	Interpolation des données manquantes	80
4.1.1	Simulation des données de cisaillement gravitationnel	80
4.1.2	Introduction aux méthodes d' <i>inpainting</i>	82
4.1.3	<i>Inpainting</i> des cartes de convergence incomplètes	87
4.2	Inversion des cartes de cisaillement incomplètes	90
4.2.1	Le problème inverse	91
4.2.2	Algorithme	92
4.2.3	Résultats	92
4.3	Estimation des statistiques d'ordre deux et trois	93
4.3.1	Résultats sur les cartes de convergence	93
4.3.2	Résultats sur les cartes de cisaillement	94
4.4	Conclusion	98
5	Filtrage des cartes de matière noire	101
5.1	La méthode multi-échelles : MRLens	102
5.1.1	Description de la méthode MRLens	102
5.1.2	Autres méthodes multi-échelles	106
5.1.3	Résultats sur des simulations	108
5.2	Application aux données COSMOS	115
5.2.1	Reconstruction de la carte de matière noire 2D	115
5.2.2	Comparaison matière noire - matière baryonique	117
5.2.3	Reconstruction de la carte de matière noire 3D	118
5.3	Application à la simulation Horizon de tout le ciel	119
5.3.1	La carte de convergence	120
5.3.2	Estimation de statistiques non-Gaussiennes	121
5.3.3	Reconstruction de la distribution de masse	123
5.4	Conclusion	124

6	Comment contraindre au mieux les paramètres cosmologiques	127
6.1	Nos outils pour la discrimination de modèles cosmologiques	128
6.1.1	Les simulations	128
6.1.2	Le taux de discrimination	129
6.1.3	Les statistiques	131
6.1.4	Les représentations	133
6.2	Analyse et résultats	134
6.2.1	Traitement du bruit	134
6.2.2	Résultats de la discrimination	136
6.3	Discussion	139
6.4	Conclusion	140
	Conclusion	143
	Annexe	147
	Bibliographie	149

Table des figures

1.1	Représentation bidimensionnelle de la distorsion spatio-temporelle engendrée par la présence de matière	6
1.2	L'évolution de l'Univers	8
1.3	Différents types d'Univers	9
1.4	Distribution du contenu énergétique de l'Univers.	10
1.5	Illustration de l'effet de lentille gravitationnelle par une masse ponctuelle. . .	15
1.6	Première lentille gravitationnelle découverte	16
1.7	Quelques exemples d'anneau d'Einstein	17
1.8	Effets de lentille gravitationnelle forts dans l'amas Abell 2218	17
1.9	Illustration de l'effet de lentille gravitationnelle par des structures à grande échelle	18
1.10	Approximation des lentilles minces.	20
1.11	Schéma géométrique de l'effet de lentille gravitationnelle dans le cas d'un alignement parfait	21
1.12	Schéma simple des lentilles où on peut voir que la lumière emprunte des chemins différents pour les 2 images de la même source.	26
2.1	Carte de convergence et carte de cisaillement simulées	37
2.2	Carte de convergence bruitée reconstruite à partir des mesures de cisaillement	38
2.3	Carte de convergence bruitée reconstruite à partir des mesures de flexion . . .	40
2.4	Spectre de puissance du bruit de cisaillement superposé à celui du bruit de flexion obtenus à partir de cartes simulées	42
2.5	Erreur de reconstruction en fonction de la largeur de la Gaussienne	44
2.6	Reconstruction avec le filtre Gaussien	44
2.7	Comparaison entre le filtre de Wiener et le filtre Gaussien	45
2.8	Reconstruction avec le filtre de Wiener	46
2.9	Contraintes sur les paramètres cosmologiques	51
2.10	Grille utilisée pour les transformations de Fourier cartésienne et polaire . . .	53
2.11	Calcul de la puissance moyenne par fréquence	53
2.12	Représentation de la configuration équilatérale du bispectre dans l'espace de Fourier	54
2.13	Masques appliqués aux données Subaru et CFHTLS	55
2.14	Effet de <i>ghost</i>	56
3.1	Fonction de Gabor.	63
3.2	Les personnalités des ondelettes	64
3.3	Fonctions ondelettes	65
3.4	Test de parcimonie	66
3.5	Algorithme de la transformation en ondelettes bi-orthogonale	71
3.6	Schéma pour illustrer une décomposition en ondelettes non-redondante	72

3.7	Résultat d'une transformation en ondelettes bi-orthogonale non-redondante .	73
3.8	Fonction d'échelle et fonction ondelette	74
3.9	Résultat d'une transformation en ondelettes redondante	75
3.10	Quelques <i>ridgelets</i>	76
4.1	Carte de convergence simulée	82
4.2	Exemple d'inpainting numérique sur une oeuvre d'art	83
4.3	Interpolation d'une sinusoïde tronquée	85
4.4	Inpainting avec 50% de données manquantes distribuées aléatoirement	86
4.5	Inpainting avec 50% de données manquantes avec un masque corrélé	87
4.6	Inpainting avec 20% de données manquantes avec un masque décorrélé	87
4.7	Erreur d'approximation non-linéaire	88
4.8	Erreur sur le spectre de puissance moyen en fonction du nombre d'itérations maximum	90
4.9	Cartes de convergence simulées et incomplètes	91
4.10	Cartes de convergence reconstruites à partir des cartes de cisaillement incomplètes	93
4.11	Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence avec le masque du relevé CFHTLS	95
4.12	Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence avec le masque du relevé Subaru.	95
4.13	Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence avec le masque du relevé CFHTLS	96
4.14	Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence avec le masque du relevé Subaru.	96
4.15	Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence bruitées et avec le masque du relevé CFHTLS	97
4.16	Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence bruitées et avec le masque du relevé Subaru.	97
4.17	Estimation du bispectre équilatéral moyen avec le masque du relevé CFHTLS	99
4.18	Estimation du bispectre équilatéral moyen avec le masque du relevé Subaru.	99
5.1	Fonctions de pénalisation	104
5.2	Comment trouver le seuil FDR graphiquement ?	105
5.3	Exemples de fonctions de potentiel ϕ	108
5.4	Carte de convergence simulée	109
5.5	Carte de masse bruitée	110
5.6	Reconstruction avec le filtre Gaussien, filtre de Wiener, filtrage MRLens	111
5.7	Résultat pour la méthode MRLens et MEM-LensEnt2	112
5.8	Variance en fonction de l'échelle	113
5.9	Log du spectre de puissance de l'erreur pour le filtrage MRLens et le filtrage MEM-LensEnt2	114
5.10	Modes E et B d'une carte de convergence simulée	114
5.11	Modes E et B de carte de convergence filtrée	115
5.12	Distribution de matière noire correspondant au champ COSMOS	116
5.13	Comparaison de la matière baryonique et non-baryonique à grande échelle	117
5.14	Reconstruction 3D de la distribution de matière noire.	118
5.15	Carte de convergence de tout le ciel dérivée de la simulation Horizon	121
5.16	Moments de la convergence en fonction de l'échelle moyenne des plans en ondelettes	122

5.17	Comparaison entre le spectre de puissance angulaire de la carte de convergence simulée et le modèle analytique	123
5.18	Reconstruction de la carte de convergence à partir du filtre de Wiener et de la méthode MRLens.	125
6.1	Les modèles cosmologiques choisis	130
6.2	Taux de discrimination entre deux modèles m_1 et m_2 en utilisant la méthode FDR	131
6.3	Carte de convergence simulée avec et sans bruit	134
6.4	Carte de convergence filtrée par un filtre Gaussien	135
6.5	Carte de convergence filtrée par la méthode MRLens	136

Introduction

Cette thèse porte sur l'application des méthodes multi-échelles aux effets de lentille gravitationnelle faibles. Elle s'inscrit dans la problématique plus générale de la cosmologie.

La cosmologie s'intéresse à l'étude globale de la formation, de l'évolution et de la structure de l'Univers. Depuis l'aube des temps, les hommes cherchent à appréhender l'Univers le plus souvent de manière métaphysique. La cosmologie moderne qui étudie l'Univers d'un point de vue scientifique en cherchant les lois universelles qui gouvernent la dynamique cosmique est assez jeune : un siècle environ ! L'étude d'un système aussi complexe que l'Univers est assez ambitieuse. Elle repose sur l'existence d'un modèle cosmologique qui cherche à décrire la structure et la dynamique de l'Univers de manière globale. Pour cela, il existe un certain nombre de paramètres dans ce modèle qu'il faut ajuster pour décrire au mieux l'Univers que l'on observe.

Le modèle cosmologique repose sur les multiples observations du ciel dans les différentes longueurs d'ondes et avec des techniques variées. Certaines de ces observations ont marqué la cosmologie moderne :

- On admet aujourd'hui que l'Univers est en *expansion*. Cette hypothèse s'appuie sur les observations de E. Hubble qui en 1929 montre que le décalage spectral de la lumière émise par les galaxies est proportionnel à leur distance ([Hubble 1929](#)).
- Il est admis aussi que la matière visible ou ordinaire (étoiles, nuages de gaz,...) ne représente qu'une très faible partie de la masse de l'Univers au plus quelques pourcents. La densité de l'Univers proviendrait essentiellement d'une matière invisible que l'on appelle *matière noire* qui a été mise en évidence par l'étude de la vitesse des galaxies dans les amas de galaxies ([Zwicky 1937](#)).
- Une autre hypothèse que vérifie les modèles cosmologiques est le *principe cosmologique* qui stipule que tous les points d'observation de l'Univers sont équivalents. Il en découle que l'Univers est spatialement homogène et isotrope à grande échelle. Cette hypothèse est vérifiée par l'observation du rayonnement fossile également appelé fond diffus cosmologique qui a été observé pour la première fois par [Penzias and Wilson \(1965\)](#).
- Récemment une nouvelle composante a été introduite au modèle cosmologique : l'*énergie noire* pour tenter d'expliquer les observations de [Riess et al. \(1998\)](#); [Perlmutter et al. \(1998\)](#); [Garnavich et al. \(1998\)](#) qui ont montré que l'expansion de l'Univers était en accélération contrairement à ce que l'on pensait jusque là.

Cette thèse a pour but d'apporter une contribution à l'étude de ce modèle cosmologique en s'appuyant sur les effets de lentille gravitationnelle faibles. Contrairement aux observations de la matière visible qui n'observent qu'une fraction de la masse totale, les effets de lentille gravitationnelle sont directement sensibles au potentiel gravitationnel et sont donc une des meilleures techniques disponibles actuellement pour localiser et cartographier la distribution de matière noire.

Un grand nombre de nouveaux instruments consacrés à la mesure du cisaillement gravitationnel sont déjà prévus. Ils fourniront une quantité de plus en plus importante de données, depuis le sol et l'espace. Les données brutes ainsi obtenues sont toujours brouillées par la turbulence atmosphérique pour les observations au sol et à cause de l'imperfection de l'imagerie des télescopes dans le cas plus général. Par conséquent, il est nécessaire d'extraire des données l'information pertinente afin de remonter aux paramètres physiques des objets étudiés. Pour analyser une image et plus globalement un signal, il existe un certain nombre de transformations qui permettent de représenter ce signal sous une forme qui permet de mieux l'analyser. La transformation la plus populaire est la transformation de Fourier qui fournit une représentation fréquentielle du signal. Depuis une dizaine d'années, une nouvelle représentation n'a cessé de se développer : la représentation multi-échelles qui s'appuie sur la transformation en ondelettes.

Dans cette thèse, nous utilisons des méthodes multi-échelles pour améliorer le traitement des données de cisaillement gravitationnel. Nous développons ainsi de nouvelles méthodes pour la reconstruction et l'analyse des cartes de matière noire.

*
* *

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

- ★ Le premier chapitre rappelle le cadre cosmologique adopté et décrit les bases théoriques des effets de lentille gravitationnelle.
- ★ Dans le chapitre II, nous montrons comment on peut utiliser l'un de ces effets : le cisaillement gravitationnel pour contraindre les paramètres cosmologiques et cartographier la distribution de matière noire. Nous présentons toute la chaîne de traitement ainsi que les méthodes qui sont couramment utilisées. L'approche multi-échelles que nous adoptons dans cette thèse a pour but d'améliorer la précision de certaines de ces méthodes. Ces améliorations sont présentées dans les chapitres IV, V et VI. Certains de nos travaux qui ne sont pas fondés sur les techniques multi-échelles sont déjà présentés dans ce chapitre. Nous présentons notamment une nouvelle méthode qui permet d'estimer le bispectre de manière rapide et exacte en utilisant une transformation de Fourier polaire rapide.
- ★ Dans le chapitre III, nous faisons une introduction au formalisme des ondelettes et nous décrivons les représentations multi-échelles utilisées dans les trois chapitres suivants. Cette partie pose les bases mathématiques en traitement d'images nécessaires à la compréhension de cette thèse.
- ★ Dans le chapitre IV, nous proposons une nouvelle méthode d'interpolation des données manquantes appelée FASTLens basée sur le principe d'*inpainting*. Cette méthode permet de reconstruire une carte de convergence complète à partir des cartes de cisaillement incomplètes. Cette approche est très innovante car elle permet d'éviter tous les problèmes rencontrés habituellement pour estimer des statistiques en présence de données manquantes.
- ★ Dans le chapitre V, nous proposons une nouvelle méthode de filtrage appelée MRLens basée sur les méthodes multi-échelles et nous la comparons aux méthodes de filtrage utilisées habituellement. Cette méthode qui a montré sa supériorité face aux méthodes existantes a déjà été utilisée dans plusieurs applications. Nous présentons notamment à la fin de ce chapitre une application aux données COSMOS qui a permis de reconstruire la carte de matière noire la plus précise à ce jour.

- ★ Le chapitre VI est consacré à la description d'une étude menée afin de déterminer la meilleure statistique pour contraindre le modèle cosmologique. Nous considérons plusieurs statistiques qui permettent de mesurer la non-Gaussianité et nous cherchons celle qui brise le mieux la dégénérescence en nous basant sur des simulations réalistes. Nous introduisons notamment une nouvelle statistique, appelée WPC (pour Wavelet Peak Counting), qui s'avère être la meilleure pour contraindre le modèle cosmologique.
- ★ Dans le dernier chapitre, nous donnons les conclusions du travail qui a été mené pendant cette thèse ainsi que les perspectives.
- ★ L'annexe liste les publications et autres contributions qui reposent sur le travail présenté dans ce manuscrit.

CHAPITRE 1

Cosmologie et lentilles gravitationnelles

Sommaire

1.1 Le cadre cosmologique	6
1.1.1 Relativité Générale et cosmologie	6
1.1.2 La matière noire	10
1.1.3 L'énergie noire	12
1.1.4 Conclusion	14
1.2 Les lentilles gravitationnelles	14
1.2.1 L'observation des effets de lentille gravitationnelle	14
1.2.2 La théorie des lentilles gravitationnelles	18
1.2.3 Les différents effets de lentille gravitationnelle	22
1.2.4 Conclusion	26

La cosmologie a énormément profité de l'accroissement de la qualité des instruments de mesure ces dernières années. On sait aujourd'hui que la matière visible, c'est-à-dire celle directement accessible aux observations par la lumière qu'elle émet aux différentes longueurs d'onde, représente moins de 5% du contenu de l'Univers. Le reste est sous la forme de composantes non visibles : la "matière noire" et "l'énergie noire".

La question de la nature, de la distribution, de l'évolution de la matière dans l'Univers est devenue un sujet de recherche très important du point de vue théorique (modèle cosmologique), observationnel (recherche de matière noire directe et indirecte) et du point de vue numérique (modèle hiérarchique de formation des structures). Les dernières années ont vu l'émergence de l'effet de lentille gravitationnelle faible comme sonde cosmologique privilégiée pour mesurer indirectement la géométrie et la dynamique de l'Univers. Cet effet de lentille gravitationnelle est une des meilleures techniques disponibles actuellement pour cartographier la distribution de matière noire à presque toutes les échelles. Il permet en outre, d'aborder le problème de la nature de l'énergie noire.

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire le cadre cosmologique dans lequel nous nous sommes placés. Nous rappelons ensuite les bases observationnelles et théoriques des effets de lentille gravitationnelle.

1.1 Le cadre cosmologique

1.1.1 Relativité Générale et cosmologie

De nos jours, le cadre théorique le plus couramment utilisé pour décrire l'Univers est celui de la Relativité Générale de [Einstein \(1915\)](#).

La Relativité Générale

En voulant généraliser sa théorie de la Relativité Restreinte aux référentiels en accélération, Einstein aboutit en 1915 à une nouvelle vision de la gravitation qui remplace celle d'Isaac Newton : la théorie de la Relativité Générale ([Einstein 1915](#)). Celle-ci introduit la notion de courbure de l'espace. Elle se résume à une équation fondamentale reliant la géométrie de l'espace-temps et son contenu en masse-énergie. La Fig. 1.1 illustre la courbure d'un espace géométrique à deux dimensions engendrée par la présence d'une masse. Les lignes représentent des *géodésiques*¹ de cet espace.

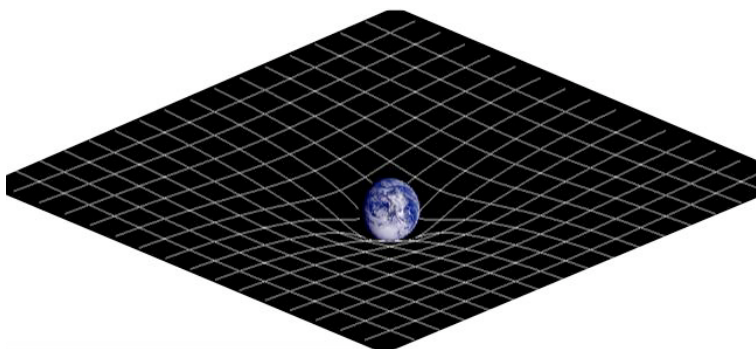


FIG. 1.1 – Représentation bidimensionnelle de la distorsion spatio-temporelle engendrée par la présence de matière. Ainsi la matière modifie localement la géométrie de l'espace-temps. Représentation obtenue en utilisant le logiciel 3DCAD et une image de la Terre obtenue par la mission Galileo (NASA).

L'aspect le plus important de cette théorie est l'abandon du concept de force de gravitation. Pour Einstein, le mouvement d'un corps gravitant n'est pas déterminé par une force, mais par la configuration de l'espace-temps locale. Par exemple, d'après Newton, la Terre tourne autour du Soleil car celui-ci exerce une force gravitationnelle sur notre planète, alors que pour Einstein, c'est une courbure de l'espace-temps introduite par la masse du Soleil qui est à l'origine du mouvement de la Terre. Une conséquence fondamentale est que les photons qui composent la lumière, bien qu'ils n'aient pas de masse, sont sujets aux mêmes perturbations de l'espace-temps que la matière ordinaire et leur trajectoire est affectée par la présence de matière.

Pour comprendre comment la lumière se propage dans l'Univers, il est donc nécessaire de résoudre les équations du champ d'Einstein en utilisant le fait que la lumière se déplace selon les géodésiques de l'espace-temps.

Le modèle cosmologique

Très peu de temps après la publication de la Relativité Générale par Einstein, des astrophysiciens commencent à s'appuyer sur l'outil mathématique qu'elle leur fournit pour élaborer des modèles théoriques de l'Univers.

¹Le terme géodésique désigne le chemin le plus court entre deux points d'un espace.

En 1916, Karl Schwarzschild trouve aux équations d'Einstein une solution locale qui décrit la géométrie de l'espace-temps autour d'un objet sphérique de masse M (sans rotation) ([Schwarzschild 1916](#)). Cette solution donne une excellente description de la géométrie de l'espace-temps autour d'objets comme le Soleil ou les trous noirs. Elle est à la base de l'un des tests de la vérification de la théorie de la Relativité Générale d'Einstein : l'avancée du périhélie de Mercure.

Einstein lui-même s'attaque au problème en 1917 et aboutit au premier modèle global de l'Univers s'appuyant sur la Relativité Générale ([Einstein 1917](#)). Ce modèle décrit un Univers statique et invariable dans le temps, car Einstein avait forcé ses équations à donner un tel résultat en introduisant un nouveau terme : la "constante cosmologique". Ce modèle peut s'exprimer grâce au carré de la distance (infinitésimale) entre deux points de l'espace-temps et peut s'écrire :

$$ds^2 = \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) - c^2 dt^2, \quad (1.1)$$

où c est la vitesse de la lumière et k le facteur de courbure. Cette forme quadratique ds^2 introduite par Einstein porte le nom de métrique et permet d'exprimer la courbure de l'espace-temps en un point donné en fonction des masses (et de l'énergie) présentes. En Relativité Générale, un certain nombre de phénomènes comme les effets de lentille gravitationnelle, dont nous parlerons en détails un peu plus loin, est déterminé par cette métrique de l'espace-temps.

La même année, Willem de Sitter s'attaque également au problème. Il met alors au point un modèle dans lequel, à sa grande surprise, la distance entre deux points de l'espace augmente avec le temps : il venait d'obtenir le premier modèle théorique d'un Univers en expansion dont la métrique générale peut s'écrire :

$$ds^2 = a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) - c^2 dt^2, \quad (1.2)$$

où $a(t)$ est le facteur d'expansion ([de Sitter 1917](#)). Ce modèle a néanmoins le défaut d'être trop simpliste car il décrit un Univers vide dépourvu de matière donc sans courbure.

C'est finalement en 1922 que le mathématicien Alexandre Friedmann réussit à développer un modèle réaliste d'Univers, dans lequel celui-ci est en expansion et dont la métrique peut s'écrire ([Friedmann 1922](#)) :

$$ds^2 = a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Rr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) - c^2 dt^2. \quad (1.3)$$

où R représente le signe de la courbure.

En 1927, Georges Lemaître arrive aux mêmes résultats que Friedmann de manière indépendante ([Lemaître 1927](#)). Contrairement à Friedmann il connaît assez vite le succès car sa théorie est aussitôt confirmée par les observations d'Edwin Hubble ([Hubble 1929](#)). En effet, en 1929, Hubble montre que l'Univers est en expansion grâce à l'observation spectroscopique des galaxies lointaines. Il montre qu'il existe une relation de proportionnalité entre la distance des galaxies et leur vitesse d'éloignement : plus les galaxies sont loins, plus elles semblent s'éloigner rapidement. La loi établie par Hubble est $v = H_0 d$ où H_0 est le paramètre de Hubble. Cette relation qui est connue aujourd'hui sous le nom de "loi de Hubble" est l'un des piliers de la cosmologie contemporaine.

Enfin, en 1935 Howard Percy Robertson et Arthur Geoffrey Walker font une analyse plus poussée de ce modèle.

Cette métrique connue aujourd'hui sous le nom de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker sert encore de référence de nos jours car elle permet de rendre compte de l'évolution globale de l'Univers.

La formation de l'Univers

Les débuts de l'Univers sont encore assez incertains. La théorie du Big Bang postule que l'Univers se serait créé spontanément à partir d'une singularité, il y a environ 14 milliards d'années (d'après les observations). Mais la relativité Générale est incapable d'expliquer le commencement de l'Univers.

Après le Big Bang, l'Univers serait rentré dans une phase d'inflation. Un centième de seconde après, on est en présence d'un mélange de protons, de neutrons et d'électrons. Quelques secondes après le Big Bang, la nucléosynthèse primordiale commence formant ainsi les premiers noyaux atomiques d'hydrogène, d'hélium et de lithium.

400 000 ans après le Big Bang, alors que l'expansion continue, refroidissant lentement l'Univers, les électrons se combinent avec les noyaux atomiques par un processus de recombinaison et les photons commencent à traverser librement l'Univers. On parle ainsi de découplage entre la matière et le rayonnement. Nous pouvons observer l'état de l'Univers à ce moment, grâce aux photons émis à cette époque, en observant les radiations du fond diffus cosmologique (ou CMB pour Cosmic Microwave Background). Les fluctuations de ce rayonnement sont les graines de la structure actuelle de notre Univers.

Finalement les nuages froids d'hydrogène et d'hélium se forment au bout d'un million d'années. Sous l'action de la gravitation, ces nuages se condensent ensuite et donnent naissance aux premières galaxies et amas de galaxies et aux structures filamentaires que l'on observe à plus grande échelle. Les étoiles et les planètes telles que nous les connaissons se forment au bout de 5 milliards d'années. Nous pouvons observer l'état de l'Univers environ 9 milliard d'années après le Big Bang grâce aux effets de lentille gravitationnelle dont nous parlerons plus tard.

Le concept général du Big Bang basé sur un Univers en expansion, plus dense et plus chaud par le passé, est attribuable à A. Friedmann et G. Lemaître qui respectivement en 1922 et 1927 décrivent dans les grandes lignes l'expansion de l'Univers. Cette expansion fut assez vite confirmée par Hubble (1929).

Le modèle du Big Bang suppose aussi que l'Univers ait été par le passé dans un état bien plus homogène qu'aujourd'hui voir Fig. 1.2. Cette hypothèse est confirmée par l'observation du "fond diffus cosmologique" qui a été observé pour la première fois en 1965 par Penzias et Wilson (Penzias and Wilson 1965). Ce faible rayonnement quasi-uniforme témoigne de l'époque dense et chaude de l'Univers primordial. En 1989, les observations de COBE, ont permis de mesurer pour la première fois les fluctuations de ce fond diffus cosmologique, à l'origine des structures que l'observe aujourd'hui (Smoot et al. 1992).

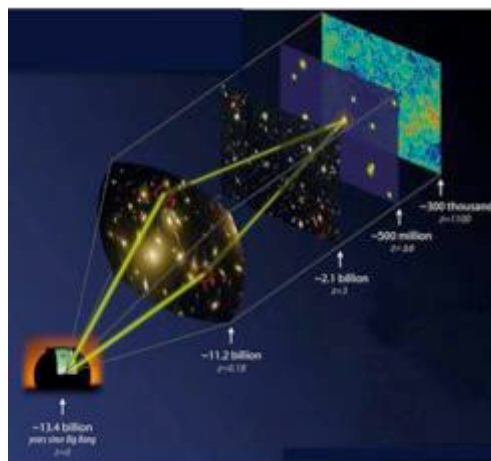


FIG. 1.2 – L'évolution de l'Univers (par Kneib & Ellis avec le Caltech Digital Media Center).

La courbure de l'Univers

L'expansion générale de l'Univers est contrôlée par la densité énergétique globale de l'Univers ρ_0 qui tient compte de toutes les formes d'énergie contenues dans l'Univers. Localement, la courbure de l'espace en un point donné est directement liée à la densité qui s'y trouve ρ_0^{local} . D'un point de vue global, il existe comme nous l'avons dit précédemment un lien mathématique entre la courbure globale de l'Univers et le contenu global en matière-énergie de l'Univers ρ qui n'est aujourd'hui connu qu'approximativement. Les travaux d'Alexandre Friedmann mettent en évidence une valeur particulière de la densité de l'Univers ρ_c appelée densité critique, qui définit la limite entre trois types d'Univers possibles qui se distinguent par leur courbure et par leur évolution dans le temps. Il introduit alors le paramètre de densité de matière $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}$ qui contrôle l'expansion générale de l'Univers.

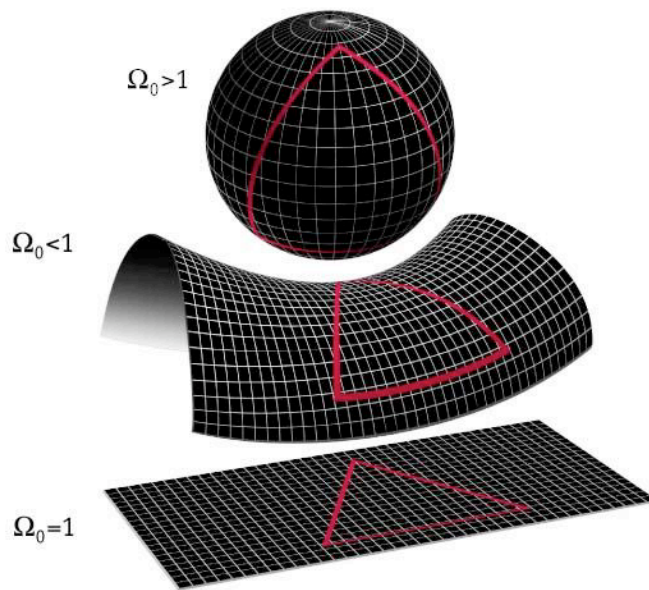


FIG. 1.3 – Représentation bidimensionnelle des différents types de géométries possibles pour l'Univers.

Dans les modèles de Friedmann, si la densité globale de l'Univers ρ est strictement supérieure à ρ_c ($\Omega_0 > 1$), c'est la gravitation qui finit par l'emporter. L'expansion de l'Univers étant remplacée un jour par une contraction qui se finit par un effondrement catastrophique appelé le Big Crunch. Du point de vue de la géométrie, ce cas correspond à un Univers fermé (voir Fig. 1.3). Si la densité globale est strictement inférieure à ρ_c ($\Omega_0 < 1$), c'est l'expansion qui finit par triompher et l'Univers continue à se dilater indéfiniment et rapidement. L'Univers est dans ce cas ouvert (voir Fig. 1.3). Enfin, si la densité globale est exactement égale à la valeur critique ρ_c ($\Omega_0 = 1$), l'expansion continue indéfiniment, mais elle se ralentit avec le temps. Ce cas correspond à un Univers plat dont la géométrie spatio-temporelle est Euclidienne (voir Fig. 1.3). Les modèles de Friedmann décrivant un Univers en expansion sont encore à l'heure actuelle les modèles de base de la cosmologie contemporaine.

La mesure de la densité de matière Ω_0

Pour pouvoir discriminer entre les différents modèles de Friedmann et ainsi connaître le futur de l'Univers, il faut pouvoir mesurer avec précision la densité globale de matière et d'énergie de l'Univers. C'est tout l'enjeu de la cosmologie moderne. En pratique, les astrophysiciens se heurtent à une difficulté majeure : il semble que la matière visible, directement

accessible aux observations, ne constitue qu'une très faible partie de la masse totale de l'Univers, l'autre partie étant sous une forme encore inconnue appelée "matière noire".

1.1.2 La matière noire

La nature et la quantité de "matière noire" dans l'Univers constituent aujourd'hui une des énigmes les plus fascinantes soulevées par la cosmologie.

La naissance du terme "matière noire"

La méthode la plus naturelle pour déterminer la densité moyenne de l'Univers consiste à mesurer directement la quantité de matière observée dans un volume donné de l'Univers. En pratique, il suffit de considérer une région suffisamment grande de l'Univers et d'y compter le nombre de galaxies. On évalue ensuite le nombre moyen d'étoiles par galaxie et la masse moyenne d'une étoile. On peut ainsi obtenir une estimation de la quantité moyenne de matière contenue dans un volume donné sans oublier de tenir compte de la masse contenue hors des étoiles, dans le gaz et le milieu interstellaire. Depuis plus de cinquante ans toutes les tentatives visant à estimer le contenu en matière de l'Univers en utilisant cette méthode montrent que sa fraction observable (déterminée par l'émission X, UV, visible, InfraRouge,...) ne peut pas rendre compte de certains effets observés.

La notion de "matière noire" fut introduite en 1937 avec les observations de Zwicky qui en mesurant la distribution des vitesses des galaxies dans l'amas de Coma, trouve des vitesses excessivement élevées compte-tenu de la masse visible. Elles sont tellement élevées qu'il en déduit qu'une grande quantité de masse doit être présente dans l'amas sous forme cachée si on ne veut pas que l'amas soit dissocié depuis très longtemps ([Zwicky 1937](#)). Cet article proposait déjà d'utiliser les effets de lentille gravitationnelle pour sonder le contenu des amas.

Depuis, plusieurs éléments plaident en faveur de l'existence d'une composante de matière sombre. C'est tout d'abord l'observation de la vitesse de rotation des galaxies dans les amas de galaxies qui a montré que la quantité de matière visible était insuffisante pour expliquer la cinématique observée. Ensuite, ce sont les effets de lentille gravitationnelle qui se sont avérés être trop importants comparés à la quantité de matière accessible par les observations. Ensuite, l'observation du gaz chaud présent dans les amas de galaxies en équilibre hydrostatique, a supposé l'existence d'une masse supplémentaire invisible. Enfin, la mesure de l'abondance en Deutérium dans l'Univers a montré que la densité baryonique est bien inférieure à la densité critique alors que d'autres mesures tendent à montrer que la densité totale est proche de cette densité critique.

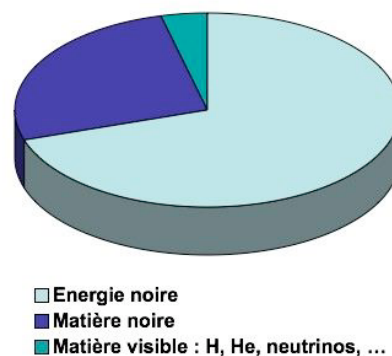


FIG. 1.4 – Distribution du contenu énergétique de l'Univers.

Finalement, nous savons aujourd'hui que ce que nous observons de l'Univers n'en représente qu'une très faible partie. Les observations montrent que plus de 95% du contenu de l'Univers est invisible et sa nature nous est inconnue (voir Fig. 1.4). On pense, qu'environ 26% du contenu de l'Univers est sous forme de matière noire qui n'interagit pas ou faiblement avec le reste de la matière. La matière visible ne représenterait que 4% du contenu de l'Univers et les 70% restants seraient sous une forme mystérieuse appelée "énergie noire" dont nous parlerons à la fin de cette section.

Les candidats à la matière noire

Pour expliquer la matière manquante, les scientifiques se sont dans un premier temps tournés vers la matière ordinaire (ou baryonique) et ont passé en revue tous les types d'objets qui pourraient y contribuer, tels les nuages de gaz, les astres morts ou les trous noirs. Ils se sont ensuite tournés vers de la matière non-baryonique en la recherchant sous forme de matière noire froide (particules neutres et massives) et sous forme de matière noire chaude (particules légères et rapides).

Matière noire ordinaire ou baryonique

Ils ont commencé par s'intéresser aux nuages de gaz. Grâce à l'expérience ROSAT (1990) qui a fourni la première carte de tout le ciel en rayons X, ils montrent alors que les nuages de gaz ionisé au sein des amas de galaxies ne contribuent que faiblement à la masse manquante et que le confinement même de ces nuages à proximité des galaxies suppose la présence de matière noire. Ils montrent également que les nuages d'hydrogène atomique dans lesquels sont présentes les étoiles sont insuffisants eux aussi pour expliquer cette forte interaction gravitationnelle qui fait tourner les étoiles en périphérie de galaxie plus vite que prévu.

Les astronomes se sont alors intéressés aux objets plus compacts et n'émettant pas ou pas assez de lumière pour être détectés. Ces objets sont appelés « MACHO », pour Massive Compact Halo Objects. Les *naines brunes*² étaient des bons candidats mais leur nombre s'avère être trop faible. Les *naines blanches*³ ne peuvent pas non plus à elles seules expliquer le déficit en masse car cela supposerait d'observer un plus grand nombre de *supernovae de type Ia*⁴ (Metcalf and Silk 2007). Finalement, il a été montré que les MACHOs ne peuvent pas expliquer la quantité de matière noire présente dans l'Univers dû à leur faible nombre (Freese et al. 1999).

Les trous noirs auraient également pu être de bons candidats car ils sont beaucoup plus massifs que les MACHOs ou les étoiles. Cependant, il faudrait près d'un million de trous noirs par galaxie pour combler ce manque de matière ce qui devrait générer des effets gravitationnels importants sur les étoiles à proximité qui n'ont pas été observés (Klessen and Burkert 1996).

Finalement, selon la théorie du Big Bang, la matière ordinaire, formée de proton et de neutron, ne peut constituer qu'une faible fraction de la matière noire. L'inverse suppose la production d'énormes quantités d'hydrogène et d'hélium dans l'Univers primordial. Or les quantités prédites par ce scénario sont très grandes, comparées à celles fixées par les observations qui concordent parfaitement avec les valeurs proposées par le modèle standard du Big Bang. La piste de la matière noire baryonique a maintenant été délaissée par les astronomes qui se sont penchés sur une autre forme de matière, la matière non baryonique.

²Les naines brunes sont des astres qui ne sont pas suffisamment massifs pour amorcer les réactions de fusion nucléaire et briller comme des étoiles normales.

³Les naines blanches sont des étoiles mortes composées d'éléments lourds.

⁴Les supernovae de type Ia sont des explosions de naines blanches.

Matière noire non baryonique

Le neutrino a été pendant longtemps un candidat majeur dans la recherche de matière noire non-baryonique. Depuis la mise en évidence du phénomène d'oscillation du neutrino par l'expérience Super-Kamiokande en 1998, on sait que les neutrinos possèdent une masse non-nulle (Fukuda et al. 1999). Cette particule, la plus abondante dans l'Univers après le photon, est insensible aux forces électromagnétiques et à la force nucléaire forte. Elle interagit donc très peu avec les autres particules, ce qui en faisait un bon candidat pour la matière noire. Cependant, les résultats du satellite WMAP combinés aux résultats des expériences d'oscillations ont montré que la masse du neutrino est beaucoup trop faible pour que cette particule puisse constituer l'essentiel de la matière noire (Spergel et al. 2003).

Il existent deux grandes familles quant à la nature de la matière noire : la matière noire dite "chaude" et celle dite "froide". Dans le cas de matière noire chaude, telle que les neutrinos, les particules ont des vitesses proches de celle de la lumière, tandis que dans le cas de matière noire froide les particules sont plus massives et donc plus lentes. La vitesse de déplacement de ces particules intervient dans l'ordre de formation des grandes structures de l'Univers. Actuellement, c'est le modèle de matière noire froide (CDM pour Cold Dark Matter) qui semble l'emporter largement, favorisant ainsi un modèle hiérarchique où les galaxies se forment avant les amas, les systèmes se forment à partir de l'effondrement des fluctuations de densité initiales qui croissent sous l'effet de la gravitation.

Les WIMPs (Weakly Interactive Massive Particles) sont une classe de particules lourdes, interagissant faiblement avec la matière, et pouvant constituer d'excellents candidats à la matière noire froide non-baryonique à condition qu'ils existent. Pour l'instant, les WIMPs ne sont que des particules prédites par la physique des particules qui restent hypothétiques. De nombreuses expériences cherchent encore à les détecter (EDELWEISS, ANTARES, IceCube, PAMELA...).

Autre théorie

Certains physiciens se sont lancés dans l'étude de théories alternatives faisant abstraction de la matière noire. Parmi les théories de ce type, celle qui fait le plus d'adeptes est la théorie « MOND » (MODified Newtonian Dynamics) qui a été proposée en 1983 par Mordehai Milgrom (Milgrom 2002). Cette théorie qui repose sur une modification de la loi de Newton aux accélérations très faibles permet de résoudre le problème de la rotation trop rapide des étoiles et des galaxies. Il est apparu récemment qu'elle était en contradiction avec l'observation de l'amas "Bullet" (Clowe et al. 2004). Mais le problème peut se résoudre en admettant l'existence d'une composante de matière peu collisionnelle qui doit être présente dans des proportions importantes pour rendre compte des effets observés. On pourrait alors penser que la proposition MOND n'apporte rien dans ce contexte, puisque de la matière noire doit être introduite. Ce n'est pas tout à fait le cas, car dans le cas de MOND cette matière noire pourrait être constituée de neutrinos qui ne joueraient pas un grand rôle sur la dynamique des galaxies, car ils seraient distribués de façon très diffuse et très homogène à cette échelle. Les observations de l'amas "Bullet" ne permettent pas encore vraiment d'exclure la validité de la théorie MOND.

1.1.3 L'énergie noire

Expansion accélérée de l'Univers

L'année 1998 fut une date très importante dans l'histoire de la cosmologie moderne. Deux équipes annoncent que l'expansion de l'Univers ne ralentit pas comme on le pense jusqu'alors, mais qu'elle est en pleine accélération (Riess et al. 1998; Perlmutter et al. 1998; Garnavich et al. 1998). Les deux équipes arrivent à la même conclusion de manière indépendante, en

s'appuyant sur l'observation des supernovae de type Ia. Ces supernovae qui sont très lumineuses et qui sont depuis longtemps utilisées pour mesurer les distances dans l'Univers s'avèrent être moins brillantes que prévu.

Les résultats de 1998 sont assez vite confirmés par une observation du télescope spatial (HST) en 2001. Celui-ci observe la plus lointaine des supernovae connues, à une distance de plus de 10 milliards d'*années-lumière*⁵. Là encore, la supernova se révèle légèrement moins brillante que prévu, ce qui ne peut s'expliquer que par une expansion accélérée.

Plus récemment, en 2003, une nouvelle observation du télescope spatial, cette fois-ci sur un échantillon de 11 supernovae de type Ia, confirme les observations précédentes. L'analyse de ces résultats montre que la quantité de matière présente a dû freiner l'expansion de l'Univers pendant les premiers milliards d'années, mais qu'ensuite l'expansion se serait accélérée (il y a environ 4 ou 8 milliards d'années). L'accélération de l'expansion est donc interprétée comme la présence d'une force répulsive mais la nature de cette force que l'on appelle "énergie noire" reste pour l'instant une vraie énigme.

La nature de l'énergie noire

On sait aujourd'hui que l'énergie noire représente environ 70% du contenu de l'Univers (voir Fig. 1.4) mais la nature exacte de cette énergie noire est un vrai mystère. On sait qu'elle est très homogène, peu dense et qu'elle est dotée d'une pression négative, qui la fait se comporter comme une force gravitationnelle répulsive. Deux solutions sont habituellement utilisées pour expliquer l'expansion accélérée de l'Univers. L'une suppose que l'énergie noire est une constante dans le temps et dans l'espace qui remplit l'Univers de manière homogène. Et l'autre, propose de décrire l'énergie noire à l'aide d'un champ scalaire appelé champ de quintessence dont la densité peut varier dans le temps et dans l'espace.

La première solution qui est la plus couramment acceptée fait appel au concept assez ancien de constante cosmologique notée Λ , qui fut introduit en 1917 par Einstein. Après avoir mis au point sa théorie de la Relativité Générale en 1915, Albert Einstein constate que dans leur forme originale les équations de sa nouvelle théorie ne permettent pas de décrire un Univers statique et invariable dans le temps. Or, à cette époque, la vision d'un Univers statique prévaut dans toute la communauté astronomique. Il décide donc d'ajouter un nouveau paramètre appelé constante cosmologique, qui lui permet d'avoir un Univers statique. Physiquement, ce terme s'interprète comme une nouvelle force qui tend à faire se repousser les corps de l'Univers les uns les autres. En 1929, Hubble montre que le décalage spectral⁶ de la lumière émise par les galaxies est proportionnel à leur distance. Hubble montre ainsi que l'Univers n'est pas statique, mais en expansion (Hubble 1929). La constante cosmologique perd alors sa raison d'être. Aujourd'hui, on invoque cette constante pour expliquer l'expansion accélérée de l'Univers. L'ajout de cette constante cosmologique au modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker est à l'origine du modèle Λ CDM (Cold Dark Matter) composé de matière noire froide et d'énergie noire.

La deuxième solution qui représente l'énergie noire à l'aide d'un champ scalaire diffère de la première solution par le fait que l'équation d'état de l'énergie noire peut varier dans le temps et dans l'espace. Ce type de modèle, qui est appelé modèle de quintessence, prédit une accélération variable dans le temps et un peu moins rapide que celle prédite par une constante cosmologique. Pour l'instant, aucune preuve n'est venue rejeter ou infirmer ce type

⁵L'année-lumière est la distance que parcourt la lumière en un an, soit un peu moins de dix mille milliards de kilomètres.

⁶Le décalage spectral z d'une galaxie, par effet semblable à un effet Doppler, nous donne sa vitesse v de récession cosmologique par rapport à la nôtre $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$

de modèle.

Il existe de nombreuses autres idées pour tenter d'expliquer cette énergie noire. Selon certains auteurs aussi, l'énergie noire proviendrait juste du fait que la Relativité Générale représente mal l'Univers à grande échelle comme le soutient la théorie MOND ([Milgrom 2002](#)). Seules des observations très précises de l'Univers peuvent nous permettre de répondre à cette question. On peut notamment utiliser les lentilles gravitationnelles faibles dont nous parlons dans la section suivante pour reconstruire la distribution de matière de l'Univers. Selon que les structures se forment plus ou moins tôt dans l'histoire cosmique, on peut ainsi arriver à contraindre les propriétés de l'énergie noire.

1.1.4 Conclusion

La cosmologie, qui cherche à reconstruire le scénario complet de la formation de l'Univers et à en expliquer la structure actuelle, est bien loin de son achèvement. Cependant, les concepts qui sont nés de la Relativité Générale au début de ce siècle ont prouvé qu'ils constituaient une base de travail solide. Le principe cosmologique qui a pour conséquence que l'Univers à grande échelle est isotrope et homogène, ainsi que la découverte de l'expansion de l'Univers, de la matière noire et de l'énergie noire sont les piliers centraux sur lequel s'appuie le modèle Λ CDM. Pour les astrophysiciens d'aujourd'hui, cette théorie apparaît comme un modèle assez simple qui parvient à expliquer de nombreuses observations.

1.2 Les lentilles gravitationnelles

Le modèle cosmologique s'appuie sur un grand nombre d'observations très différentes les unes des autres. La mesure du spectre des fluctuations du fond diffus cosmologiques (CMB) permet notamment de dire que le contenu en énergie de l'Univers a une valeur proche de la densité critique. La mesure de la luminosité apparente des supernovae de type Ia en fonction du décalage spectral a permis récemment de mettre en évidence l'accélération actuelle de l'expansion de l'Univers. Les distributions de galaxies déduites des relevés spectroscopiques ainsi que les catalogues d'amas issus des grands catalogues X permettent de déterminer la distribution de matière (visible) à grande échelle. Il existe bien d'autres observations qui apportent des contraintes sur le modèle cosmologique en utilisant des approches indépendantes mais ayant toutes pour but d'aboutir à un même modèle cosmologique complet dit de "concordance".

Depuis une dizaine d'années, les chercheurs utilisent un nouvel outil pour sonder l'Univers : les lentilles gravitationnelles. Contrairement aux observations de la matière visible qui n'observent qu'une fraction de la masse totale, les effets de lentille gravitationnelle sont directement sensibles au potentiel gravitationnel cumulé le long de la ligne de visée et donc à la distribution de masse globale.

Dans cette partie, nous rappelons les bases théoriques des effets de lentille gravitationnelle. Pour plus de détails sur le sujet, de nombreux articles de revue ont été écrits récemment, voir [Mellier \(1999\)](#); [Bartelmann and Schneider \(2001\)](#); [Refregier \(2003b\)](#); [Munshi et al. \(2006\)](#).

1.2.1 L'observation des effets de lentille gravitationnelle

L'effet de lentille gravitationnelle a pour effet de dévier les rayons lumineux qui passent à proximité de concentration de matière déformant ainsi les images que recevrait un observateur placé sur la ligne de visée. Tout d'abord, ce sont les effets de *lentille gravitationnelle forts* qui ont été observés (images multiples d'un même objet, arcs géants, anneaux d'Einstein...). Aujourd'hui, c'est la mesure des effets de lentille gravitationnelle faibles qui fait l'objet d'une

vive compétition internationale, l'objectif à terme étant de cartographier la distribution de matière noire avec précision pour pouvoir en déterminer sa nature et ainsi contraindre la nature de l'énergie noire.

La déviation des rayons lumineux

Pendant l'élaboration de sa théorie de la Relativité Générale, [Einstein \(1915\)](#) prédit qu'un corps massif courbe l'espace-temps localement et que toute particule (massive ou pas) se déplace selon les géodésiques ($ds = 0$) de cet espace courbe.

Considérons d'abord la déflexion par une masse ponctuelle M (voir Fig. 1.5). Si le paramètre d'impact ξ est plus grand que le rayon de Schwarzschild de la lentille $R_S \equiv 2GM/c^2$, c'est-à-dire $\xi \gg R_S$, la Relativité Générale prédit que l'angle de déflexion est égale à :

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2\xi} = \frac{2R_S}{\xi}, \quad (1.4)$$

où G est la constante gravitationnelle et c la constante de la lumière.

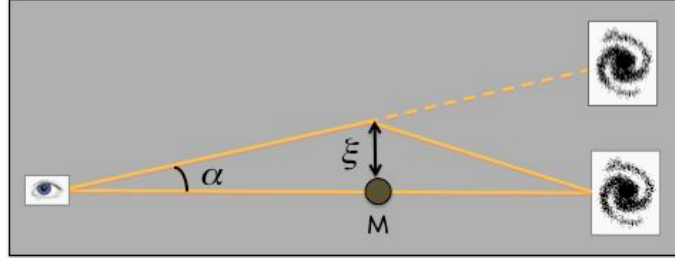


FIG. 1.5 – Illustration de l'effet de lentille gravitationnelle par une masse ponctuelle.

Ainsi, plus le rayon lumineux passe loin de la lentille gravitationnelle, moins il est dévié. Plus la lentille est massive et plus le rayon est dévié.

C'est un triomphe pour Einstein quand la valeur qu'il avait prédite pour la déflexion des rayons lumineux par le Soleil est prouvée par les observations ([Eddington 1919](#)). Remarquons que le premier à suggérer une déviation (la moitié de celle prédite par Einstein) des rayons à proximité d'un corps massif est l'astronome Soldner (Observatoire de Munich) en 1804 dans le cadre de la mécanique Newtonienne, plus d'un siècle avant Einstein !! Cependant les résultats de Soldner à cette époque ne sont pas pris au sérieux car à l'époque c'est la description de la lumière en termes d'ondes qui prévaut.

Pour un rayon lumineux passant à une distance ξ d'un objet de distribution de masse $M(\xi)$ (à symétrie axiale), l'angle déflexion totale $\alpha(\xi)$ (voir par exemple la revue de [Bartelmann and Schneider 2001](#)) est égal à (d'après le théorème de Birkoff) :

$$\alpha(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi}, \quad (1.5)$$

où $M(\xi)$ est la masse contenue à l'intérieur du rayon ξ .

Typiquement, cet angle vaut quelques micro-secondes d'arc si l'effet de lentille est créé par une étoile, il vaut quelques secondes d'arc quand l'effet est créé par une galaxie et est de l'ordre de l'arc minute quand cet effet est dû à des amas de galaxies.

Quand un quasar subit un effet gravitationnel "fort" par une *étoile* isolée, la séparation entre les différentes images est de l'ordre de la micro-seconde. Pour cette raison, les effets

gravitationnels par une étoile sont appelés micro-lentilles, que la séparation entre les images soit résolue ou pas. Par opposition au cas où il subit un effet de lentille gravitationnelle par une *galaxie* isolée où la séparation entre les différentes images est cette fois-ci de l'ordre de la seconde ; l'importance de l'effet permet de distinguer l'effet de lentille gravitationnelle fort" de l'effet de lentille gravitationnelle faible".

Les premiers effets de lentille gravitationnelle observés

C'est en 1979 que [Walsh et al.](#) découvrent le premier exemple de quasar dont l'image est dédoublée par une galaxie en avant-plan (Fig. 1.6). L'objet, appelé Q0957+561A&B, consiste en deux images séparées sur le ciel de 6 secondes d'arc. Plusieurs arguments plaident en la faveur de la double image d'un même objet : des signaux similaires décalés dans le temps ont été mesurés, la similarité des spectres, la galaxie qui fait office de lentille a pu être observée.



FIG. 1.6 – Première lentille gravitationnelle découverte (Walsh et al, 1979) : le double quasar 0957+561.

En 1988, les radioastronomes du VLA (Very Large Array) découvrent une lentille gravitationnelle en forme d'anneau, MG 1131+0456, conforme à la théorie. Cet objet est baptisé « Anneau d'Einstein » parce qu'Einstein en prédit l'existence en 1936. Récemment, l'étude effectuée par le SDSS (Sloan Digital Sky Survey) sur 200 000 galaxies révèle un certain nombre de candidats potentiels. L'étude de certains d'entre eux par le HST (Hubble Space Telescope) avec la caméra ACS (Advanced Camera for Surveys) a permis de mettre en évidence 8 nouveaux anneaux d'Einstein que l'on peut voir sur la Fig. 1.7.

Les premières observations de lentilles fortes dans les amas sont effectuées au début des années 1990 (voir la revue de [Fort and Mellier 1994](#))

En 1995, le télescope spatial Hubble révèle l'exemple très impressionnant de l'amas de galaxies Abell 2218 qui produit des images multiples et donne naissance à plus de 120 arcs lumineux, voir la Fig. 1.8. Abell 2218 est un amas de galaxies massif de la constellation Draco situé à 2 milliards d'années lumière ; c'est l'une des lentilles gravitationnelles les plus fortes observées. Ces arcs gravitationnels sont en réalité les images de galaxies qui sont au moins 10 fois plus éloignées que l'amas et qui sont déformées par la présence de l'amas. En augmentant l'intensité des images des galaxies en arrière-plan, les lentilles gravitationnelles

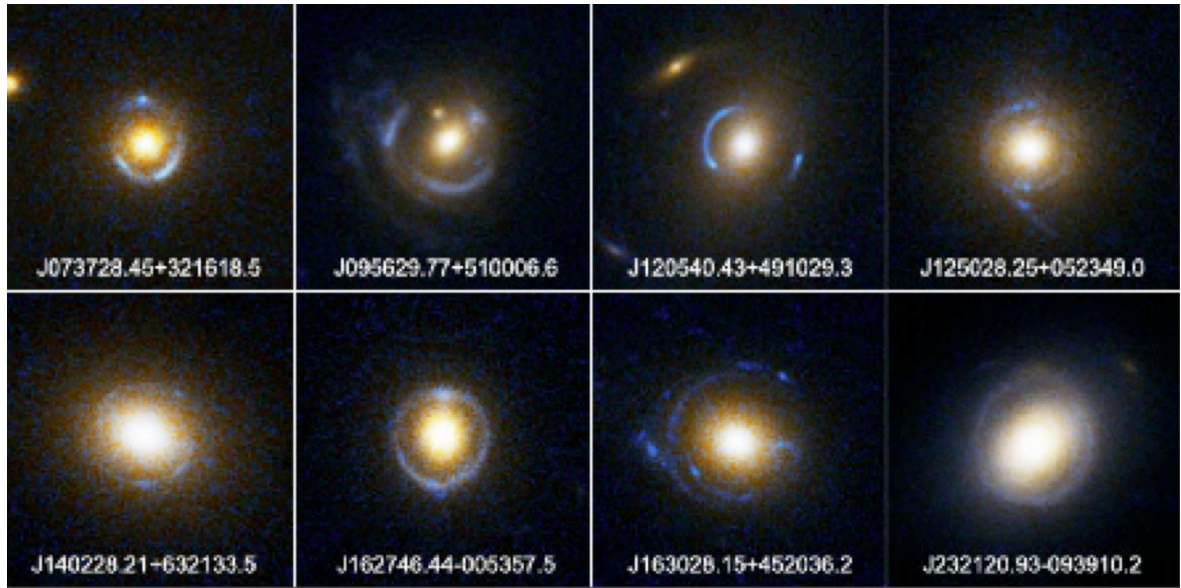


FIG. 1.7 – Quelques exemples d’anneau d’Einstein pris par le Hubble Space Telescope par la caméra ACS qui apparaissent quand la source, la lentille et l’observateur sont alignés.

telles que l’amas Abell 2218 nous permettent de voir des galaxies que l’on n’aurait pas pu observer autrement.

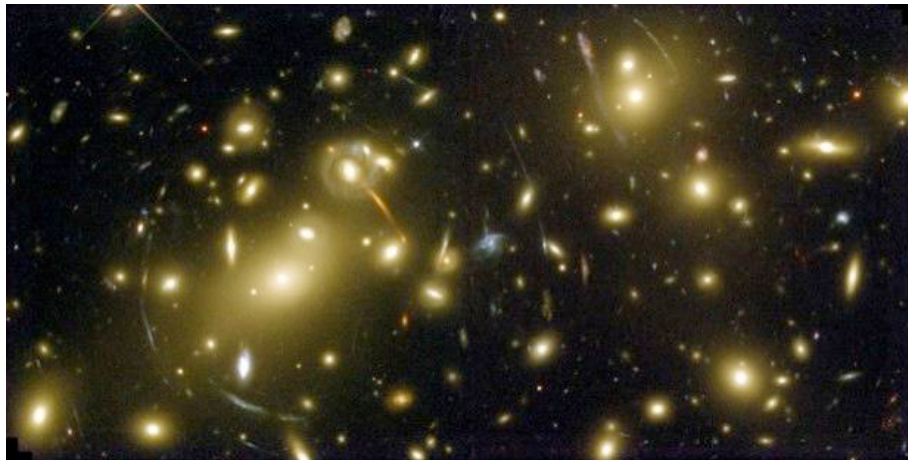


FIG. 1.8 – Effets de lentille gravitationnelle forts dans l’amas Abell 2218 (W. Couch et al, 1975 - HST).

Ce n’est qu’en 2000 que le cisaillement gravitationnel par les grandes structures (tracées par les filaments de galaxies) est observé (Van Waerbeke et al. 2000; Kaiser et al. 2000; Wittman et al. 2000; Bacon et al. 2000).

Depuis, un effort théorique important a été mené pour exploiter tous ces effets de lentille gravitationnelle comme des outils astrophysiques. De grands relevés du ciel ont été entrepris avec des télescopes de plus en plus puissants pour construire des catalogues de galaxies profonds et grand champ. Ces relevés ont permis de mettre en évidence un grand nombre d’effets de lentille gravitationnelle (images multiples d’un même quasar, anneaux d’einstein,

arcs géants lumineux,..).

Des effets de lentilles à toutes les échelles

Les effets de lentille gravitationnelle sont perceptibles à toutes les échelles. À petite échelle dans notre galaxie, les objets compacts dans le Halo affectent les images des étoiles du nuage de Magellan (Aubourg and Palanque-Delabrouille 1999). À l'échelle suivante, les galaxies peuvent produire des images multiples des QSOs (objets quasi-stellaires) (Walsh et al. 1979), comme elles peuvent créer des distorsions dans les images des autres galaxies. Finalement, à plus grande échelle, les amas de galaxies qui sont les lentilles gravitationnelles les plus puissantes observées modifient la forme des galaxies distantes en formant des arcs géants ou plus petits (Kneib et al. 1996). A l'échelle au-dessus, les structures à grande échelle créent des distorsions des galaxies en arrière-plan (Refregier 2003b).

L'analyse de plus en plus fine de ces effets permet d'une part de reconstruire avec précision la distribution de masse au coeur des amas là où le potentiel gravitationnel est le plus fort, c'est-à-dire là où les effets de lentille gravitationnelle sont les plus importants. Et d'autre part, ces déformations permettent d'élaborer des cartes de densité de matière d'une grande fraction du ciel projeté en utilisant les effets de lentille gravitationnelle faibles. Grâce à de telles reconstructions, on ne cesse d'améliorer les contraintes que l'on a sur certains paramètres cosmologiques.

1.2.2 La théorie des lentilles gravitationnelles

Comme nous venons de le voir, le rayon lumineux subit une déviation en présence d'objets massifs sur la ligne de visée. Cette déviation dépend de la distribution de masse de l'objet. Toute la matière rencontrée pendant son trajet le dévie de plus en plus (voir Fig. 1.9). Pour une source lointaine, l'angle de déviation total dépend ainsi de la masse projetée le long de la ligne de visée.

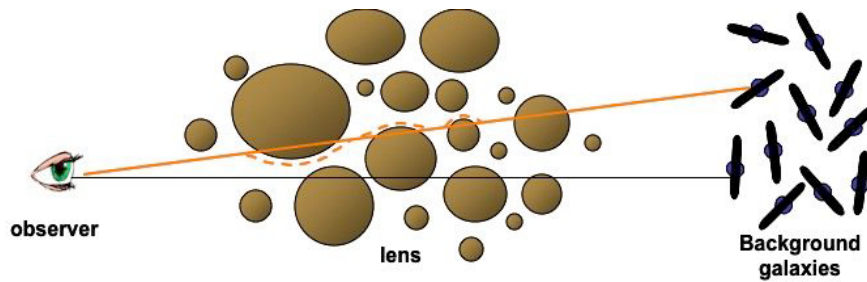


FIG. 1.9 – Illustration de l'effet de lentille gravitationnelle par des structures à grande échelle. Les photons allant des galaxies lointaines (à droite) vers l'observateur (à gauche) sont déviés par les structures (au milieu) que l'on appelle des lentilles gravitationnelles. Les déviations subies par les photons créent des distorsions dans les galaxies observées. La mesure de ces distorsions permet de remonter à la distribution de masse qui les a générées.

Cette déviation produit des effets de lentille gravitationnelle que l'on peut observer sur les images des galaxies lointaines. Nous allons essayer de comprendre tous ces effets de lentille gravitationnelle en commençant par rappeler leurs bases théoriques.

L'angle de déviation

Pour déterminer l'angle de déviation à l'origine des effets de lentille gravitationnelle, il faudrait résoudre les équations de la Relativité Générale et ainsi déterminer les géodésiques pour une distribution de masse donnée. La théorie des lentilles gravitationnelles peut être décrite plus simplement en partant du principe de Fermat qui est bien connu en optique géométrique. Selon ce principe, la lumière choisit le chemin le plus court pour aller d'une source donnée à un observateur. Le temps de parcours de la lumière dans un milieu est donné par l'indice de réfraction n qui donne la vitesse dans ce milieu en fonction de la vitesse dans le vide. Une interprétation possible est de considérer que la lumière est ralentie en présence d'un champ gravitationnel. Nous utiliserons ce formalisme malgré le fait qu'en Relativité Générale la vitesse de la lumière est une constante c . Dans la plupart des applications astrophysiques des lentilles gravitationnelles, le champ gravitationnel peut être décrit comme un potentiel gravitationnel Newtonien $\Phi(\vec{r})$ que l'on suppose faible $\Phi \ll c^2$. Sous ces hypothèses, l'indice de réfraction effectif peut s'écrire (Schneider et al. 1992) :

$$n = 1 + \frac{2}{c^2}|\Phi|. \quad (1.6)$$

La vitesse de propagation de la lumière dans cette région perturbée devient (au 1^{er} ordre) :

$$c' = \frac{c}{n} = \frac{c}{1 + \frac{2}{c^2}|\Phi|} \cong c \left(1 - \frac{2}{c^2}|\Phi| \right) \lesssim c. \quad (1.7)$$

Les rayons lumineux sont ainsi déviés et l'angle de déflexion α peut être obtenu en intégrant le long du trajet de la lumière la composante de l'indice de réfraction perpendiculaire à la ligne de vue :

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = - \int \vec{\nabla}_{\perp} n(\vec{r}) dz = \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_{\perp} \Phi(\vec{r}) dz, \quad (1.8)$$

où $\vec{\xi}$ est le paramètre d'impact dans le plan de la lentille.

Ce type d'effet peut être couramment observé sur les routes en été : la route chauffée par le soleil occasionne un gradient de température important (air très chaud près de la route), ce qui fait varier l'indice de réfraction de l'air en fonction de l'altitude. Contrairement à ce cas cependant, l'angle de déflexion $\vec{\alpha}$ ne dépend pas de la longueur d'onde et l'effet de lentille gravitationnelle est achromatique. L'angle de déflexion est relié au potentiel gravitationnel projeté Ψ . Ce dernier est obtenu en intégrant le potentiel newtonien à 3 dimensions $\Phi(\vec{r})$ le long de la ligne de visée, comme on peut le voir ci-dessous :

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_{\perp} \Phi(\vec{r}) dz = \vec{\nabla}_{\perp} \underbrace{\left(\frac{2}{c^2} \int \Phi(\vec{r}) dz \right)}_{\Psi} \quad (1.9)$$

où $\vec{\nabla}_{\perp}$ est la composante de l'opérateur gradient, perpendiculaire au rayon lumineux.

La trajectoire d'un rayon lumineux étant déviée, la position observée d'une source est différente de sa position réelle. L'équation des lentilles que nous allons décrire dans le paragraphe suivant permet de relier ces deux positions.

L'équation des lentilles

Approximation des lentilles minces :

En principe, les rayons lumineux provenant d'une source qui traverse l'espace-temps pour nous parvenir sont affectés par toute la matière intégrée le long de la ligne de visée entre la source et l'observateur. Une approximation souvent utilisée pour étudier les lentilles gravitationnelles est l'approximation des lentilles minces. Elle consiste à considérer que l'effet de lentille est provoqué par une seule inhomogénéité de matière qui se trouve entre la source et l'observateur. Comme on le fait en optique géométrique, le système est divisé en plusieurs plans : le plan source, le plan de la lentille et le plan de l'observateur (voir Fig. 1.10). On suppose alors que les rayons lumineux se déplacent sans subir aucune déflexion entre les plans et qu'ils subissent une légère déflexion α au niveau du plan de la lentille.

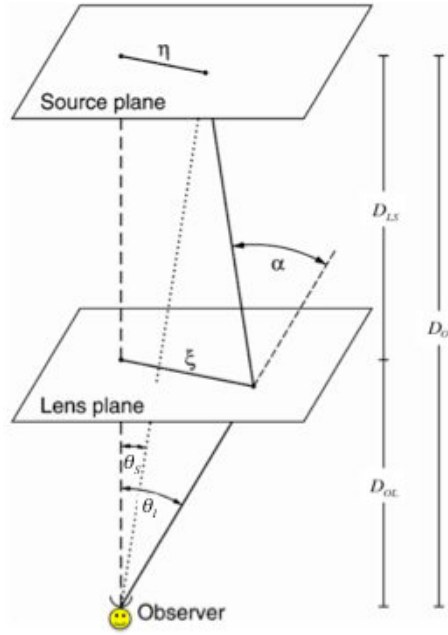


FIG. 1.10 – Approximation des lentilles minces.

Cette approximation est très utilisée lorsque l'on étudie les effets de lentille induits par des objets compacts tels que les amas de galaxies ou les galaxies. Il est bien évident qu'une approche plus complexe est utilisée pour étudier les effets de lentille induits par des objets étendus tels que les structures à grande échelle. Pour des raisons de simplicité, nous continuerons à utiliser cette approximation dans ce manuscrit.

Equation des lentilles :

Pour une lentille mince stationnaire et dans le cas de petits angles de déflexion, la physique de l'effet de lentille gravitationnelle est contenue dans l'équation des lentilles :

$$\vec{\theta}_S = \vec{\theta}_I - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \vec{\alpha}(\vec{\xi}), \quad (1.10)$$

qui exprime la position apparente des images θ_I en fonction de la vraie position de la source θ_S (voir Fig. 1.10). Les termes D_{LS} et D_{OS} sont respectivement les distances de la lentille à la source et de l'observateur à la source. Le terme devant l'angle de déflexion exprime le fait que l'effet apparent de déplacement de la position d'un objet sur le plan image est d'autant plus grand que ce plan est loin derrière la lentille.

Cette équation peut-être résolue pour trouver la relation entre le plan objet et le plan de la lentille. Si la déflexion par la lentille est faible, on associe à chaque objet une seule image dont les coordonnées ont été déformées. C'est ce qu'on appelle l'effet de lentille gravitationnelle faible. Si la déflexion par la lentille devient importante, la relation n'est plus bijective. On peut alors associer à chaque objet plusieurs images. L'équation des lentilles reste valable pour les effets de lentille gravitationnelle forts.

L'anneau d'Einstein :

Dans le cas d'un alignement parfait entre la source (S), l'observateur (O) et une lentille axialement symétrique (L) (voir Fig. 1.11), on a $\theta_S = 0$ et on vérifie facilement :

$$\alpha = \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \theta_I. \quad (1.11)$$

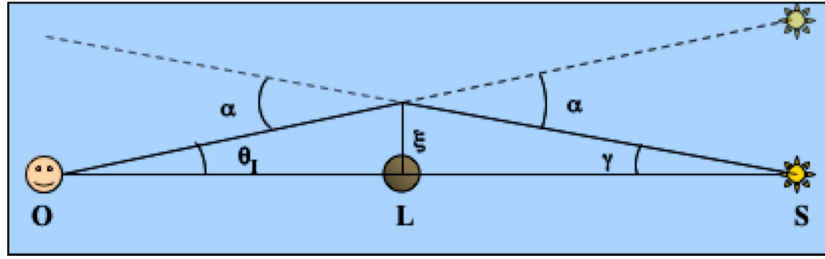


FIG. 1.11 – Schéma géométrique de l'effet de lentille gravitationnelle dans le cas d'un alignement parfait

L'observateur verra un anneau circulaire centré sur le déflecteur. La taille de l'anneau dépend de la masse totale de la lentille contenue à l'intérieur du rayon angulaire θ_E :

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}}}, \quad (1.12)$$

où θ_E est le rayon angulaire de l'anneau que l'on appelle Anneau d'Einstein.

Sur la Fig. 1.7, on peut voir 8 anneaux d'Einstein observés par le Hubble Space Telescope (HST) avec la caméra ACS (Advanced Camera for Surveys). La probabilité d'observer un alignement parfait est faible. Par contre le cas d'alignement approximatif entre la source, la lentille et l'observateur est moins rare. Remarquons, que c'est [Chwolson \(1924\)](#) qui le premier suggère l'idée de la formation d'une image annulaire dans le cas d'un alignement parfait entre l'observateur et deux étoiles situées à des distances différentes.

La convergence κ et la densité de masse projetée critique Σ_C

Quand la déflexion des rayons par la lentille est forte, l'équation des lentilles 1.10 peut avoir plusieurs solutions, c'est-à-dire qu'une source à la position θ_S peut avoir plusieurs images à des positions θ_I^i . Pour quantifier la puissance de la lentille, on définit une distribution de masse sans dimension : la convergence κ qui permet de séparer les deux régimes :

$$\kappa = \frac{\Sigma}{\Sigma_C}, \quad (1.13)$$

où Σ est la densité de masse de la lentille projetée dans un plan perpendiculaire à la ligne de visée et Σ_C la densité de masse projetée critique définie comme suit :

$$\Sigma_C = \frac{D_{OS}}{D_{OL}D_{LS}} \frac{c^2}{4\pi G}. \quad (1.14)$$

La densité de masse projetée critique est la densité à partir de laquelle on observe des images multiples. Elle dépend uniquement des positions angulaires Source, Lentille, Observateur et donc du décalage spectral. Quand la distribution de masse i.e. la convergence κ est supérieure à 1 alors on forme plusieurs images pour une même source. Ainsi, la convergence marque la limite entre le cas des lentilles gravitationnelles faibles et celui des lentilles gravitationnelles fortes. Ainsi quand $\kappa > 1$ on est dans le cas des lentilles fortes et quand $\kappa < 1$ dans celui des lentilles faibles.

Il est possible également d'écrire la convergence κ à partir du Laplacien du potentiel gravitationnel Ψ définit précédemment :

$$\nabla^2 \Psi(\vec{\theta}_I) = 2\kappa(\vec{\theta}_I). \quad (1.15)$$

Chacun des régimes : faible et fort des lentilles gravitationnelles a son intérêt. Les effets de lentille gravitationnelle forts sont rares. Mais ils permettent de bien contraindre le potentiel gravitationnel au coeur des amas là où les effets gravitationnels sont les plus forts. Les effets de lentille gravitationnelle faibles sont souvent difficiles à quantifier, mais ils sont présents dans chaque amas de galaxies. Ils permettent ainsi de contraindre le potentiel gravitationnel sur des plus grandes échelles.

Nous allons maintenant nous intéresser aux différents effets de lentille gravitationnelle observables.

1.2.3 Les différents effets de lentille gravitationnelle

Comme nous allons le voir, les effets induits par les lentilles gravitationnelles sur les galaxies lointaines sont nombreux : cisaillement, flexion, amplification de la luminosité apparente des galaxies,... Tous ces effets observables sur les images des galaxies en arrière-plan sont liés au fait que les rayons lumineux qui proviennent des différents points de la source sont déviés différemment en fonction de leur point d'impact sur la lentille.

Nous allons maintenant rentrer dans le détail de chacun de ces effets pour mieux comprendre comment ils peuvent être utilisés comme des outils pour sonder la distribution de matière noire et pour contraindre le modèle cosmologique.

Pour quantifier ces effets, il faut résoudre l'équation des lentilles. En supposant l'angle θ_I petit, on peut faire un développement de Taylor à l'ordre 2 de l'opérateur de distorsion (voir l'équation 1.10) comme suit :

$$\theta_{S,i} = A_{ij}\theta_{I,j} + \frac{1}{2}D_{ijk}\theta_{I,j}\theta_{I,k}, \quad (1.16)$$

où i représente la i^{eme} composante dans le plan de la lentille et j et k les composantes dans le plan source.

La matrice de distorsion (A)

Les déformations de l'image sont caractérisées localement en calculant la dérivée de l'équation des lentilles et peuvent être décrites par sa matrice Jacobienne A correspondant à la matrice des dérivées partielles du 1^{er} ordre. Cette matrice est appelée habituellement matrice de distorsion et s'écrit :

$$A_{i,j} = \frac{\partial \theta_{S,i}}{\partial \theta_{I,j}} = \delta_{i,j} - \frac{\partial \alpha_i(\theta_{I,i})}{\partial \theta_{I,j}} = \delta_{i,j} - \frac{\partial^2 \Psi(\theta_{I,i})}{\partial \theta_{I,i} \partial \theta_{I,j}}. \quad (1.17)$$

Le cisaillement gravitationnel (γ)

Le cisaillement gravitationnel γ est une mesure des déformations de l'image au 1^{er} ordre. La matrice A peut s'écrire en fonction du cisaillement $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Les composantes de cisaillement sont reliées au potentiel gravitationnel par :

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta}_I)}{\partial \theta_{I,1}^2} - \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta}_I)}{\partial \theta_{I,2}^2} \right] \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta}_I)}{\partial \theta_{I,1} \partial \theta_{I,2}}. \quad (1.19)$$

Le cisaillement γ_1, γ_2 est responsable des distorsions de l'image, il agit comme une distorsion anisotrope sur le faisceau. En supposant qu'une galaxie soit initialement circulaire de diamètre $\varnothing = 1$, le cisaillement gravitationnel la transforme en une ellipse d'axe majeur $a = \frac{1}{1-\kappa-|\gamma|}$ et d'axe mineur $b = \frac{1}{1-\kappa+|\gamma|}$ (d'après les valeurs propres de la matrice de distorsion). Cette déformation anisotrope est engendrée par un effet différentiel (de marée) du champ de gravitation. Les coefficients de cisaillement γ_1 et γ_2 peuvent être reliés aux paramètres d'ellipticité des images (i.e. aux moments d'ordre 2).

La convergence (κ)

La convergence κ que l'on a défini précédemment est reliée à la trace de la matrice A :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= A_{1,1} + A_{2,2} = \delta_{1,1} + \delta_{2,2} - \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta}_I)}{\partial \theta_{I,1}^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta}_I)}{\partial \theta_{I,2}^2}, \\ \text{tr}(A) &= 2 - \Delta \Psi(\vec{\theta}_I) = 2 - 2\kappa = 2(1 - \kappa), \end{aligned} \quad (1.20)$$

car le Laplacien est égal par définition à :

$$\Delta \Psi(\vec{\theta}) = \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta}_I)}{\partial \theta_{I,1}^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta}_I)}{\partial \theta_{I,2}^2}. \quad (1.21)$$

La convergence κ est ainsi donnée par le laplacien du potentiel projeté sur la ligne de visée et est donc directement proportionnelle à la densité de masse projetée de la lentille. Par abus de langage, on appelle souvent κ la distribution de masse.

La matrice de distorsion peut se réécrire :

$$A = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

où l'on utilise la notation $\gamma_1 = \gamma \cos 2\varphi$ et $\gamma_2 = \gamma \sin 2\varphi$. On peut ainsi voir deux effets distincts des lentilles gravitationnelles : la convergence et le cisaillement.

S'il n'y a pas de cisaillement, la matrice A devient proportionnelle à la matrice unité. Ainsi, les images apparaissent étirées ou contractées de manière isotrope mais sans subir de distorsion.

La convergence κ est donc à l'origine de la focalisation isotrope des rayons lumineux donnant une image de la même forme mais de taille différente.

L'effet de magnification (μ)

Une autre conséquence importante de la distorsion gravitationnelle est l'amplification de la luminosité apparente des galaxies lointaines que nous appellerons "effet de magnification" par la suite. Les effets de lentille gravitationnelle n'altèrent pas la brillance de surface des images : l'intensité maximale et l'intensité minimale restent les mêmes mais ils changent l'angle solide sous lequel est vue la (ou les) source(s) générant un effet de magnification.

Etant donné que l'angle θ_I est transformé en l'angle θ_S et puisque le flux reçu provenant d'une source est obtenu par le produit entre la brillance de surface et l'angle solide, les images subissent donc un effet de magnification, c'est-à-dire que le flux est multiplié par un facteur $\mathcal{A} = \frac{d\Omega}{d\Omega_0}$ où $d\Omega$ correspond à l'angle solide observée et $d\Omega_0$ correspond à l'angle solide en l'absence de lentille.

Certaines images sont amplifiées par un facteur $\mathcal{A} > 1$ d'autres par un facteur $\mathcal{A} < 1$, mais le flux total reçu, en sommant toutes les images est toujours amplifié par les effets de lentilles.

L'effet de magnification μ est aussi donné par l'inverse du déterminant de la matrice du Jacobien et est définie ainsi :

$$\mu = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2}. \quad (1.23)$$

Pour cette raison la matrice A^{-1} est souvent appelé la matrice d'amplification. Ces valeurs propres mesurent l'amplification selon la direction tangentielle et radiale et sont données par :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{1 - \kappa - |\gamma|}, \\ \mu_2 &= \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{1 - \kappa + |\gamma|}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

L'effet de magnification est idéalement infinie si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$. Ces deux conditions définissent deux courbes dans le plan de la lentille appelées "lignes critiques" : tangentielle et radiale. Une image qui se forme le long de la ligne critique tangentielle est fortement étirée tangentiellement à la ligne. Une image qui se forme près de la ligne critique radiale est étirée dans la direction perpendiculaire à cette ligne. La projection de ces deux courbes sur le plan source est appelée "lignes caustiques".

Les effets de magnification sont moins souvent utilisés que le cisaillement car on ne connaît pas le flux intrinsèque de chaque source et qu'il n'a aucune raison de tendre vers zéro en moyenne. Cependant ces effets de magnification peuvent être un atout pour normaliser la distribution de masse. Dans [Umetsu and Broadhurst \(2007\)](#), les auteurs proposent d'utiliser à la fois les effets de cisaillement et les effets de magnification pour reconstruire la distribution de masse de l'amas Abell 1689.

La flexion ($\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$)

Il a été montré récemment ([Goldberg and Bacon 2005](#); [Bacon et al. 2006](#)) que les lentilles gravitationnelles peuvent générer une "flexion" c'est-à-dire une courbure dans l'image de la

galaxie. Dans [Goldberg and Bacon \(2005\)](#), il a été montré que cette flexion est caractérisée par la dérivée seconde de l'équation des lentilles (voir l'équation 1.16) décrite par la matrice D et qu'elle peut s'écrire en termes de dérivées du champ de cisaillement :

$$D_{ij1} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial \theta_{I,1}} = \begin{pmatrix} -2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \theta_{I,1}} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,2}} & -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,1}} \\ -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,1}} & -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,2}} \end{pmatrix},$$

$$D_{ij2} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial \theta_{I,2}} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,1}} & -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,2}} \\ -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,2}} & 2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,2}} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta_{I,1}} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Pour simplifier l'analyse, on peut introduire un opérateur gradient complexe comme suggéré par [Schramm and Kayser \(1995\)](#). L'opérateur gradient complexe est défini comme suit :

$$\partial = \partial_1 + i\partial_2 = \frac{\partial}{\partial \theta_{I,1}} + i \frac{\partial}{\partial \theta_{I,2}}. \quad (1.26)$$

En appliquant l'opérateur sur le potentiel gravitationnel Ψ , on obtient le champ de déflexion gravitationnelle α :

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = \partial \Psi. \quad (1.27)$$

En appliquant l'opérateur gradient conjugué sur le champ de déflexion α , on retrouve le champ de convergence κ

$$\kappa = \frac{1}{2} \partial^* \alpha = \frac{1}{2} \partial^* \partial \Psi. \quad (1.28)$$

Et en appliquant l'opérateur gradient sur le champ de déflexion α , on retrouve le champ de cisaillement complexe γ

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{1}{2} \partial \partial \Psi. \quad (1.29)$$

Dans [Goldberg and Bacon \(2005\)](#), ce formalisme complexe permet de généraliser l'analyse à un ordre supérieur :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \partial \partial^* \partial \Psi = \partial \kappa = \partial^* \gamma, \quad (1.30)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \partial \partial \partial \Psi = \partial \gamma, \quad (1.31)$$

où $\mathcal{F}$ est la 1^{ère} flexion et $\mathcal{G}$ est la 2^{ème} flexion. Ces deux composantes de flexion peuvent être écrites en fonction du gradient des composantes du cisaillement, comme suit :

$$\mathcal{F} = (\partial_1 \gamma_1 + \partial_2 \gamma_2) + i(\partial_1 \gamma_2 - \partial_2 \gamma_1), \quad (1.32)$$

$$\mathcal{G} = (\partial_1 \gamma_1 - \partial_2 \gamma_2) + i(\partial_1 \gamma_2 + \partial_2 \gamma_1). \quad (1.33)$$

Il a été montré récemment par [Goldberg and Bacon \(2005\)](#); [Bacon et al. \(2006\)](#) que la mesure de cette flexion peut permettre de reconstruire la distribution de masse de la lentille (comme le permet la mesure du cisaillement) avec un meilleur rapport signal-sur-bruit. Nous en discuterons un peu plus loin.

Le temps de retard (t)

La déflexion des rayons lumineux par le potentiel gravitationnel est à l'origine d'un retard dans la propagation de la lumière et donc dans la réception par l'observateur du signal émis par la source.

Ainsi le temps que met la lumière à aller de la source à l'observateur en suivant deux chemins différents dans le cas d'images multiples est typiquement différent. Ainsi si la courbe de lumière de la source est variable, par exemple si elle présente des caractéristiques particulières, elles apparaissent d'abord dans celle où le temps de parcours est le plus court et se répète ensuite avec un certain retard dans les autres images.

Ce retard est appelé le retard de Shapiro ([Shapiro 1964](#)) :

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta \nu} \Delta l = \int_{source}^{observateur} \frac{2}{c^3} |\Phi| dl. \quad (1.34)$$

Ce retard a deux composantes : la première est liée au chemin emprunté par la lumière qui est modifié dans le cas de la perturbation par une lentille (Fig. 1.12). Le retard est proportionnel au carré de la séparation angulaire entre la position intrinsèque de la source et celle de son image. La deuxième est liée au ralentissement des photons pendant qu'ils traversent le champ gravitationnel.

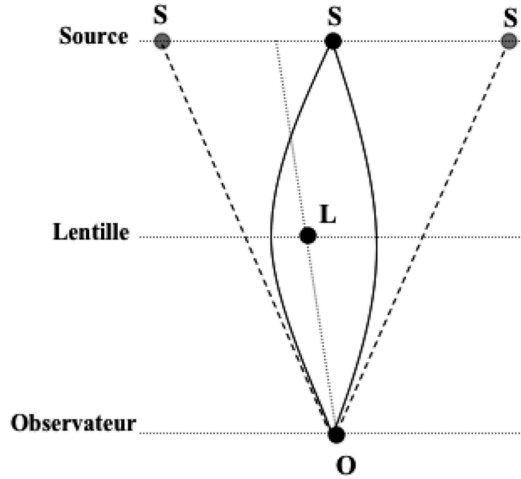


FIG. 1.12 – Schéma simple des lentilles où on peut voir que la lumière emprunte des chemins différents pour les 2 images de la même source.

L'étude de cet effet de lentille gravitationnelle fournit un moyen pour la détermination de la constante de Hubble H_0 qui intervient dans la "loi de Hubble". Notons que l'inverse de H_0 permet de remonter à l'âge de notre Univers $T = f(1/H_0)$. La méthode est basée sur la mesure du décalage temporel entre les différentes images d'une même source. Pour cela, il faut que la source présente des variations temporelles de lumière.

1.2.4 Conclusion

Les effets de lentille gravitationnelle sont multiples. Ces dernières années l'effet de lentille gravitationnelle faible est devenu la sonde cosmologique privilégiée pour mesurer la géométrie et la dynamique de l'Univers. Par l'empreinte qu'elles laissent dans l'image des galaxies lointaines, les lentilles gravitationnelles faibles permettent de sonder l'Univers. L'objectif à

terme étant de véritablement cartographier la distribution de matière noire à grande échelle ce qui doit permettre d'affiner notre compréhension de l'évolution de l'Univers et d'imposer ainsi des contraintes sur le modèle cosmologique.

CHAPITRE 2

Les lentilles gravitationnelles faibles pour contraindre la cosmologie

Sommaire

2.1	Construction d'un catalogue de galaxies	30
2.1.1	Pré-traitement et erreurs systématiques	30
2.1.2	Estimation du cisaillement gravitationnel	32
2.2	Reconstruction de la carte de convergence	35
2.2.1	L'inversion au 1 ^{er} ordre	35
2.2.2	L'inversion au 2 ^{eme} ordre	39
2.2.3	Comparaison	40
2.3	Filtrage des cartes de convergence pour cartographier la matière noire	43
2.3.1	Les filtres linéaires standards	43
2.3.2	Un filtrage non-linéaire standard : MEM	46
2.4	Estimation de statistiques pour contraindre la cosmologie	48
2.4.1	Estimation de statistiques	48
2.4.2	Calcul du spectre et du bispectre à partir de la FFT polaire	52
2.4.3	Estimation de statistiques en présence de données manquantes	55
2.5	Conclusion	59

Bien que les arcs gravitationnels provoqués par de fortes concentrations de masse soient les effets gravitationnels les plus spectaculaires, ce ne sont pas les seuls effets gravitationnels à être étudiés, comme nous venons de le voir §1.2.3. Toute concentration de masse perturbe les géodésiques que parcourent les photons arrivant jusqu'à nous et peut ainsi produire des effets de lentille gravitationnelle. L'intensité du phénomène est variable. Elle dépend de la distribution de matière de la lentille qui est à l'origine des perturbations et de la position relative de la source, de l'observateur et de la lentille. On s'attend donc à ce que toutes les images des galaxies lointaines subissent des déformations par des structures gravitationnelles d'avant-plan. En observant les effets de lentille gravitationnelle faibles sur toutes ces galaxies lointaines, on peut détecter la matière contenue dans tous les systèmes gravitationnels qui ont été traversés par la lumière qui nous arrive.

Les effets de lentille gravitationnelle faibles ont été détectés pour la première fois à la fin des années 1990 ([Van Waerbeke et al. 2000](#); [Kaiser et al. 2000](#); [Wittman et al. 2000](#); [Bacon et al. 2000](#)). Depuis, les effets de lentille gravitationnelle faibles sont utilisés pour contraindre la cosmologie. Pour cela, une mesure précise des déformations des galaxies lointaines est nécessaire qui consiste à estimer le cisaillement : γ_1 et γ_2 avec précision (voir équation 1.19).

Les premières études se sont concentrées essentiellement sur les statistiques à deux points du cisaillement (Maoli et al. 2001; Refregier et al. 2002; Hoekstra et al. 2002; Hamana et al. 2003; Semboloni et al. 2006; Hoekstra et al. 2006) et d'autres statistiques assez simple (Bernardeau et al. 1997; Jarvis et al. 2004; Kilbinger and Schneider 2005), leur objectif étant de mesurer les paramètres cosmologiques. Récemment, les études se tournent vers la cartographie de la matière noire (Bergé et al. 2008; Massey et al. 2007b).

L'effet de lentille gravitationnelle faible est un outil très efficace pour contraindre le modèle cosmologique mais l'amplitude de cet effet est si faible que sa détection nécessite une longue chaîne de traitement pour corriger toutes les erreurs statistiques et systématiques qui peuvent enlever de la précision à la mesure. De nos jours, la mesure du cisaillement gravitationnel fait l'objet d'une vive compétition internationale (Mellier 1999; Bartelmann and Schneider 2001; Refregier 2003b; Munshi et al. 2006).

Dans ce chapitre, nous décrivons les différentes étapes de la chaîne de traitement qui sont habituellement utilisées pour mettre des contraintes sur le modèle cosmologique à partir des effets de lentille gravitationnelle faibles. Cette thèse a pour but d'améliorer certaines parties de cette chaîne de traitement en proposant de nouvelles méthodes que nous présentons aux chapitres IV, V et VI.

Dans une première partie, nous montrons comment à partir des images en sortie des télescopes, on génère un catalogue de galaxies. Dans ce catalogue de galaxies sont donnés la position de chaque galaxie ainsi que le cisaillement permettant ainsi de reconstruire des cartes de cisaillement. Dans une deuxième partie, nous parlons des méthodes existantes pour dériver une carte de convergence à partir des cartes de cisaillement. Nous présentons également une étude que nous avons menée pour comparer le résultat de la reconstruction obtenu à partir des cartes de cisaillement et celui à partir des cartes de flexion. Dans une troisième partie, nous décrivons les méthodes de filtrage qui sont habituellement utilisées pour filtrer la carte de convergence permettant ainsi de cartographier la distribution de matière (noire et ordinaire) de l'Univers. Enfin, dans une dernière partie, nous décrivons les outils statistiques qui sont habituellement utilisés pour contraindre les paramètres cosmologiques. Nous introduisons alors une nouvelle méthode que nous avons développée permettant d'estimer le bispectre de manière rapide et exacte en utilisant une FFT polaire. Enfin nous faisons une introduction au problème des données manquantes dans l'analyse statistique des données de cisaillement.

2.1 Construction d'un catalogue de galaxies

2.1.1 Pré-traitement et erreurs systématiques

Pré-traitement des images en sortie des caméras CCD

Une première étape du traitement consiste à calibrer les images obtenues en sortie des caméras CCD. Pour cela, une image en champ plat doit être réalisée qui consiste à mesurer la réponse des CCD soumis à un éclairage uniforme. Cette image est ensuite utilisée pour corriger les images de la réponse des pixels. Elle est également utilisée pour détecter les pixels défectueux. Une image moyenne est ensuite réalisée pour chaque bande en faisant une moyenne à partir des différentes images prises dans chaque bande. Cette image moyenne est alors utilisée pour enlever les pixels frappés par des rayons cosmiques.

L'étape suivante consiste à mesurer le décalage spectral (ou *redshifts*) pour chaque galaxie présente sur le champ. Pour cela, on utilise les différentes bandes du relevé pour dériver des *redshifts* photométriques pour chaque galaxie (e.g. Connolly et al. 1995; Pello et al. 1996). Ces *redshifts* sont ensuite calibrés en utilisant des *redshifts* spectroscopiques disponibles pour certaines galaxies du champ. Ces *redshifts* sont utilisés pour corriger les images de certaines

erreurs systématiques ou bien pour reconstruire une distribution de matière noire 3D.

Avant de pouvoir estimer le cisaillement gravitationnel, il faut corriger l'image des erreurs systématiques qui introduisent des anisotropies et biaisent ainsi la mesure.

Les biais instrumentaux : la PSF

Parmi les systématiques qui peuvent biaiser la mesure de cisaillement, la PSF (pour Point Spread Function) également appelée réponse impulsionnelle, est un des effets majeurs.

La réponse impulsionnelle d'un système correspond à la sortie d'un système lorsque l'entrée est une impulsion. Lorsque l'entrée ne correspond pas à une impulsion, l'entrée est convoluée par cette réponse impulsionnelle.

$$I(\theta) = S(\theta) * H(\theta). \quad (2.1)$$

Dans le cas d'un système d'imagerie, l'entrée correspond à la source S que l'on cherche à imager (galaxie, étoile,...), la sortie correspond à l'image de la source I et la réponse impulsionnelle H est appelée PSF. Le produit de convolution est noté $*$.

La PSF n'est pas nécessairement à symétrie sphérique. Par conséquent, une galaxie circulaire apparaît allongée si elle est observée à travers une telle PSF anisotrope et l'effet est similaire à celui produit par les lentilles gravitationnelles. Typiquement l'effet lié à la PSF est d'environ 10% sur le cisaillement alors que l'effet lié aux lentilles gravitationnelles faibles est attendu autour de 3%. Par conséquent, si nous voulons mesurer le cisaillement gravitationnel, nous devons corriger les images en arrière-plan de leur PSF. Ce point est un problème majeur dans la détection de l'effet de lentille gravitationnelle faible (voir [Refregier 2003b](#), pour plus de détails).

Les galaxies en arrière-plan sont donc toutes convoluées par la réponse impulsionnelle du système d'imagerie qui est liée d'une part aux caractéristiques du télescope (aberration optique, erreurs de guidage...), mais aussi à l'atmosphère (turbulence atmosphérique, réfraction atmosphérique...).

Lorsque l'on cherche à mesurer les effets de lentille gravitationnelle qui sont des effets très faibles, on ne peut pas se contenter de faire une modélisation statique de la réponse impulsionnelle juste en considérant les caractéristiques du télescope et de l'atmosphère. En effet, compte-tenu de la précision dont on a besoin sur la mesure, une méthode plus précise pour tenir compte des variations de la PSF dans le temps et dans l'espace est nécessaire.

Pour plus de précision, on utilise donc une méthode qui consiste à repérer les étoiles qu'il y a sur le champ et à les utiliser pour obtenir localement la réponse impulsionnelle du système d'imagerie. Les étoiles n'étant pas résolues sur le champ on peut les modéliser par une impulsion de Dirac, leur image est donc par définition la PSF à la position de chaque étoile.

Une fois la PSF estimée pour chaque étoile du champ, on peut corriger l'image de la PSF par déconvolution. Mais, la PSF varie dans une image (en forme, taille...) et ses propriétés à la position d'une galaxie sont différentes de celles à une autre position. La correction de la PSF nécessite sa connaissance à la position de chaque galaxie dans l'image. Une interpolation est donc nécessaire pour estimer la PSF aux positions des galaxies à partir de celle à la position des étoiles. La fonction de la PSF n'étant pas totalement connue, le choix des paramètres à interpoler dépend de la méthode que l'on utilise pour estimer le cisaillement. Si on s'appuie sur des techniques telles que KSB décrite §2.1.2 ([Kaiser et al. 1995](#)) ou RRG ([Rhodes et al. 2000](#)) pour estimer le cisaillement, l'interpolation se fera sur les ellipticités ou sur les quadripôles de

la PSF. Par contre, si on utilise la méthode des shapelets également décrite §2.1.2 ([Refregier 2003a](#); [Refregier and Bacon 2003](#)) l'interpolation se fera sur les coefficients de la décomposition en shapelets.

Plusieurs types d'interpolation sont alors possibles, leur efficacité dépend du type de données, selon que la PSF varie plus ou moins vite. Pour des images avec des faibles variations spatiales de la PSF, une interpolation polynomiale paraît bien indiquée. Par contre quand les variations deviennent plus importantes des méthodes d'interpolation un peu plus compliquées peuvent devenir nécessaires.

Autres sources de contamination

Habituellement pour mesurer le cisaillement, on réalise une moyenne sur un certain nombre de galaxies en faisant l'hypothèse que l'ellipticité moyenne intrinsèque des galaxies tend vers zéro quand le nombre de galaxies devient grand. Une autre source de contamination pour l'effet de lentille gravitationnelle est liée à l'alignement intrinsèque des galaxies d'arrière-plan donnant lieu à des corrélations intrinsèques. On distingue deux types de corrélations :

- La première appelé corrélation Intrinsèque-Intrinsèque (II) provient de la corrélation de l'ellipticité intrinsèque des galaxies d'arrière-plan pour des galaxies voisines. C'est à dire que des galaxies voisines possèdent une même ellipticité. Ce qui peut arriver quand l'ellipticité intrinsèque des galaxies est affectée par les forces de marée liées aux grandes structures. L'erreur systématique introduite par ces effets de marée est reliée à la physique de formation des galaxies que l'on ne maîtrise pas encore très bien. Une méthode qui est souvent utilisée pour réduire cette contamination consiste à utiliser les mesures de décalage spectral photométrique de chacune des galaxies afin de ne pas considérer les paires de galaxies trop proches ([Heymans et al. 2006b](#); [Bridle and King 2007](#)). La corrélation intrinsèque n'est donc pas un problème si on dispose de la mesure du décalage spectral des galaxies en arrière-plan.
- La deuxième appelé Gravitationnel-Intrinsèque (GI) provient des corrélations entre l'ellipticité intrinsèque des galaxies d'arrière-plan et l'ellipticité des galaxies d'arrière-plan induite par le champ de cisaillement. Ces corrélations surviennent quand la lentille gravitationnelle a une influence sur l'ellipticité intrinsèque des galaxies. Cet effet n'est pas encore bien connu et semble notamment dépendre de la morphologie des galaxies en arrière-plan ([Heymans et al. 2006b](#)). La contamination introduite par cet effet semble être importante pouvant atteindre 10 % si elle n'est pas corrigée ([Hirata and Seljak 2004](#)) et elle reste aujourd'hui encore parmi les effets systématiques les plus délicats à traiter ([Joachimi and Schneider 2008](#)) !

L'estimation de la fonction de corrélation à deux-points du cisaillement $\xi_{i,j}$ que nous définissons précisément un peu plus loin §2.4.1 est ainsi biaisée par ces deux termes parasites :

$$\xi_{i,j} = \xi_{i,j}^{GG} + \xi_{i,j}^{II} + \xi_{i,j}^{GI}. \quad (2.2)$$

Le terme $\xi_{i,j}^{GG}$ est celui que l'on cherche à mesurer habituellement qui correspond à la corrélation Gravitationnel-Gravitationnel. Il nous permet de savoir les corrélations présentes à chaque échelle dans la distribution de matière noire.

2.1.2 Estimation du cisaillement gravitationnel

Mettant de côté les systématiques, l'estimation du cisaillement à partir de la forme des galaxies en arrière-plan est également très ambitieuse. Bien que les composantes du cisaillement γ_1 et γ_2 décrivent les déformations anisotropes des images, elles ne sont pas directement

reliées à des observables. Un effort particulier a été consacré au développement de méthodes pour tenter d'estimer au mieux le cisaillement gravitationnel.

Le programme STEP

Les auteurs de ces méthodes se sont tous réunis autour du projet STEP (Shear Testing Program) né en 2004 pour comparer la précision et la fiabilité de leurs méthodes sur un même jeu de simulations (voir [Heymans et al. 2006a](#); [Massey et al. 2007a](#)). Cette collaboration ayant pour ambition d'atteindre une précision de 1% sur la mesure du cisaillement gravitationnel pour répondre aux exigences des futurs relevés.

Toutes ces méthodes estiment tout d'abord une ellipticité pour chaque galaxie. La définition de cette ellipticité varie d'une méthode à une autre, par contre cette ellipticité a pour particularité qu'elle est directement reliée à une quantité observable.

Ensuite, pour obtenir un estimateur non biaisé du cisaillement, chaque méthode doit trouver la relation qui existe entre l'ellipticité et le cisaillement gravitationnel pour chaque valeur du cisaillement :

$$\tilde{\gamma} = \frac{\varepsilon}{P^\gamma}, \quad (2.3)$$

où $\tilde{\gamma}$ est le cisaillement estimé, ε est l'ellipticité mesurée et P^γ est appelé le facteur de susceptibilité. Toute la difficulté réside dans l'estimation de ce facteur de susceptibilité.

Un grand nombre de techniques a été développé pour mesurer la déformation des galaxies. Nous allons décrire deux des principales méthodes. La première, la plus ancienne est la méthode KSB ([Kaiser et al. 1995](#)) qui est la plus utilisée dans les analyses du cisaillement gravitationnel. Il en existe de nombreuses variantes qui conduisent à des mesures très différentes faisant ainsi apparaître les instabilités intrinsèques de la méthode. La deuxième méthode qui appartient aux méthodes de deuxième génération, la méthode des shapelets, est plus rigoureuse.

La méthode KSB

La méthode KSB utilise les moments quadripolaires (ou d'ordre 2) $M_{i,j}$ de la distribution de la lumière de l'image $S(\theta)$ pour estimer l'ellipticité, définis comme suit :

$$M_{i,j} = \int \theta_i \theta_j S(\theta) w(\theta) d\theta^2 \text{ avec } \int \theta_i S(\theta) w(\theta) d\theta^2 = 0, \quad (2.4)$$

où i (et j) $\in [1, 2]$ et $w(\theta)$ correspond à une fonction de poids pour régulariser le bruit. Les moments d'ordre 2 donnent l'information sur la direction de la déformation et son amplitude. [Kaiser et al. \(1995\)](#) choisit la définition suivante pour l'ellipticité :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{M_{1,1} - M_{2,2}}{M_{1,1} + M_{2,2}}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{2M_{1,2}}{M_{1,1} + M_{2,2}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $M_{1,1} - M_{2,2}$ correspond à l'aplatissement par rapport à x , $2M_{1,2}$ à l'aplatissement par rapport à l'axe à 45° par rapport à x et $M_{1,1} + M_{2,2}$ à l'information sur la taille.

La méthode KSB estime non seulement les déformations gravitationnelles mais elle utilise aussi des techniques pour modéliser certains effets systématiques notamment la PSF liée

à l'optique du télescope. De nombreuses variantes de la méthode KSB ont été développées mais ces méthodes ne permettent pas d'atteindre la précision nécessaire pour les observations futures.

La méthode des shapelets

La méthode des shapelets, dite de deuxième génération, a été introduite en 2003 par [Refregier \(2003a\)](#); [Refregier and Bacon \(2003\)](#) pour tenter d'estimer le cisaillement gravitationnel avec plus de précision. Cette nouvelle méthode dit de "deuxième génération" propose de résoudre le problème différemment, sans se focaliser sur les premiers moments de l'image des galaxies. La méthode se base sur la décomposition linéaire de chaque image sur une base orthonormale de fonctions localisées, appelées *shapelets*. Ces shapelets sont des polynômes d'Hermite pondérés par une fonction Gaussienne et sont les fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique. Les shapelets cartésiennes à 2 dimensions sont définies par :

$$B_{n_1, n_2}(x_1, x_2; \beta) = \beta^{-1} \phi_{n_1}\left(\frac{x_1}{\beta}\right) \phi_{n_2}\left(\frac{x_2}{\beta}\right), \quad (2.6)$$

où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ et β est l'échelle caractéristique de l'objet à décomposer. Et ϕ_n est défini comme suit :

$$\phi_n(x) = [2^n \sqrt{\pi} n!]^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad (2.7)$$

où H_n est le polynôme d'Hermite d'ordre n . Les fonctions ϕ_n peuvent être vues comme une perturbation autour de la Gaussienne ϕ_0 définissant ainsi un dictionnaire de formes. Les shapelets B_n constituent une base complète et orthonormale et une fonction f continue et intégrable peut être décomposée de la manière suivante :

$$f(x, y) = \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} f_{n_1, n_2} B_{n_1, n_2}(x, y; \beta), \quad (2.8)$$

où le coefficient shapelet d'ordre n est donné par :

$$f_{n_1, n_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) B_{n_1, n_2}(x, y; \beta) dx dy. \quad (2.9)$$

Si β est suffisamment proche de la taille de l'objet et que l'origine de la décomposition est proche du centre de l'objet, une décomposition sur les premières fonctions de base suffit à capturer l'essentiel de l'information sur la forme de l'objet. On peut ainsi limiter la décomposition aux n_{max} premiers termes :

$$f(x, y) \approx \sum_{n_1, n_2=0}^{n_1+n_2 < n_{max}} f_{n_1, n_2} B_{n_1, n_2}(x, y; \beta). \quad (2.10)$$

Contrairement à la transformation en ondelettes qui décompose une image sur une base dont les éléments (les ondelettes) ont tous la même forme mais dont l'échelle change. La transformation en shapelets que l'on vient de définir décompose une image sur une base dont les atomes élémentaires ont tous la même échelle donnée par β mais dont la forme change. Les coefficients de la décomposition permettent ainsi de calculer les paramètres de formes de manière plus précise. Les moments quadripolaires non pondérés (c'est-à-dire $w(\theta) = 1$) sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
M_{1,2} &= \sqrt{\pi}\beta^3 \sum_{n_1, n_2}^{impair} (n_1 + 1)^{1/2} (n_2 + 1)^{1/2} \left(C_{n_1+1}^{\frac{n_1+1}{2}}\right)^{1/2} \left(C_{n_2+1}^{\frac{n_2+1}{2}}\right)^{1/2} f_{n_1, n_2}, \\
M_{1,1} &= \sqrt{\pi}\beta^3 \sum_{n_1, n_2}^{pair} 2^{(2-n_1-n_2)/2} (1 + 2n_1) \left(C_{n_1}^{\frac{n_1}{2}}\right)^{1/2} \left(C_{n_2}^{\frac{n_2}{2}}\right)^{1/2} f_{n_1, n_2}, \\
M_{2,2} &= \sqrt{\pi}\beta^3 \sum_{n_1, n_2}^{pair} 2^{(2-n_1-n_2)/2} (1 + 2n_2) \left(C_{n_1}^{\frac{n_1}{2}}\right)^{1/2} \left(C_{n_2}^{\frac{n_2}{2}}\right)^{1/2} f_{n_1, n_2}, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

avec $C_n^p = \frac{p!}{p!(n-p)!}$ qui est le nombre de combinaisons de p éléments parmi n . Et l'ellipticité est définie de la même manière que pour la méthode [Kaiser et al. \(1995\)](#), (voir équation 2.5).

Grâce à la transformation en shapelets, l'information de forme est contenue dans un nombre limité de coefficients en supposant que la forme de la PSF soit suffisamment régulière. La transformation en shapelets, nous donne donc une représentation parcimonieuse (voir §3.2) des déformations de l'image. En concentrant l'information de forme qui nous intéresse, elle fournit un cadre idéal pour estimer les déformations. La méthode des shapelets fait partie des meilleures méthodes de mesure du cisaillement gravitationnel mais on n'a pas encore atteint la précision de 1% nécessaire pour les futurs relevés.

Le challenge GREAT08

La communauté des lentilles gravitationnelles a fait un pas important en Octobre 2007 en décidant de s'adresser à des experts en traitement d'images par méthode d'apprentissage pour les aider à résoudre le problème de mesure du cisaillement gravitationnel cosmologique. Ils ont pour cela utilisé le réseau PASCAL qui fournit un cadre privilégié pour soumettre des "challenges" à la communauté des méthodes par apprentissage automatique. Le but de ce réseau étant de relever des défis technologiques pour d'autres communautés tout en ayant des retombées sur leur propre communauté. Le challenge appelé GREAT08 (pour GRavitational lEnsing Accuracy Testing) a été soumis en 2008 par la communauté des lentilles gravitationnelles faibles ([Bridle et al. 2008](#)). Ce challenge a pour ambition de faire émerger de nouvelles méthodes en tirant profit d'une collaboration avec une nouvelle communauté.

2.2 Reconstruction de la carte de convergence

Une fois le cisaillement gravitationnel estimé avec la précision désirée, on peut soit faire une analyse directement sur le champ de cisaillement soit dériver une carte de convergence à partir du champ de cisaillement. La carte de convergence permet notamment de cartographier la distribution de matière noire. D'autre part, l'analyse de la carte de convergence permet de faire une analyse plus complète : elle permet de faire une analyse statistique sur les amas de galaxies ce que ne permet pas l'analyse du champ de cisaillement.

Nous allons maintenant parler des méthodes qui permettent de reconstruire la carte de convergence à partir des effets de lentille gravitationnelle faibles.

2.2.1 L'inversion au 1^{er} ordre

Comme nous l'avons vu §1.2.3, le cisaillement gravitationnel $\gamma_i(\theta)$ (avec $i = 1, 2$) est calculé à partir de la déformation des galaxies au 1^{er} ordre.

Les cartes de cisaillement

Un point important de l'effet de lentille gravitationnelle faible est que sa mesure est *statistique*. En effet, la modification de forme causée par l'effet de lentille gravitationnelle faible sur une seule galaxie est trop faible pour pouvoir être utilisée. Généralement des galaxies qui sont proches les unes des autres subissent des déformations similaires. On peut ainsi faire une moyenne sur un certain nombre de galaxies. Si on suppose que l'ellipticité intrinsèque ε_i des galaxies est aléatoire d'une galaxie à l'autre, l'ellipticité moyenne intrinsèque sur un grand nombre de galaxies, doit être nulle c'est-à-dire $\langle \varepsilon_i \rangle = 0$. En pratique, on construit des cartes de cisaillement γ_i en définissant une taille du pixel de manière à avoir une dizaine de galaxies par pixel. La valeur du cisaillement pour chaque pixel de la carte est obtenue en faisant une moyenne sur ces galaxies. Le nombre fini de galaxies fait que les cartes de cisaillement sont forcément bruitées indépendamment des erreurs de mesure. Parfois on réalise une moyenne pondérée par la distance au centre du pixel pour éviter d'avoir des variations importantes dans la distribution de matière noire quand on change légèrement la taille du pixel.

L'inversion des cartes de cisaillement

Le problème de reconstruction de masse par inversion au 1^{er} ordre consiste à reconstruire la distribution de masse projetée (normalisée) $\kappa(\theta)$ c'est-à-dire la carte de convergence à partir des cartes de cisaillement $\gamma_i(\theta)$. Il existe dans la littérature un certain nombre de formule qui permettent de reconstruire la distribution d'un amas de galaxies en utilisant le champ de cisaillement local. Une comparaison entre les différentes méthodes d'inversion locales est disponible dans [Seitz and Schneider \(1996\)](#). Nous utilisons ici la méthode d'inversion globale qui est proposée dans [Starck et al. \(2006b\)](#) qui permet de reconstruire la distribution de masse d'une large région du ciel par inversion du champ de cisaillement global. Pour cela, on considère la transformée de Fourier des équations 1.19 et 1.20 et on obtient :

$$\hat{\gamma}_i = \hat{P}_i \hat{\kappa}, \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Les transformées de Fourier sont notées avec un chapeau. Et nous définissons les $\hat{P}_i$ comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{P}_1(\mathbf{k}) &= \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}, \\ \hat{P}_2(\mathbf{k}) &= \frac{2k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les cartes de cisaillement γ_i que l'on considère ici idéalement sans bruit peuvent être calculées à partir de la carte de convergence κ en utilisant les expressions ci-dessus. La Fig. 2.1 à gauche montre un exemple de carte de convergence simulée dérivées de simulations numériques 3D (à N-corps) réalisées par [Vale and White \(2003\)](#). Sur la Fig. 2.1 à droite, on peut voir le champ de cisaillement associé au champ de convergence simulé. La direction et la taille des segments représentent l'orientation et l'amplitude du cisaillement.

Pour des observations réelles, un bruit se rajoute aux cartes de cisaillement observées qui est lié d'une part à l'ellipticité intrinsèque des galaxies qui n'est pas nulle quand on moyenne sur un nombre fini de galaxies et d'autre part à l'erreur sur la mesure de l'ellipticité des galaxies. Ce bruit se retrouve ensuite dans la carte de convergence. Les relations entre les cartes de cisaillement observées γ_{1n}, γ_{2n} d'une région A et la vraie carte de convergence κ sont données par :

$$\gamma_{in} = P_i * \kappa + N_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.14)$$

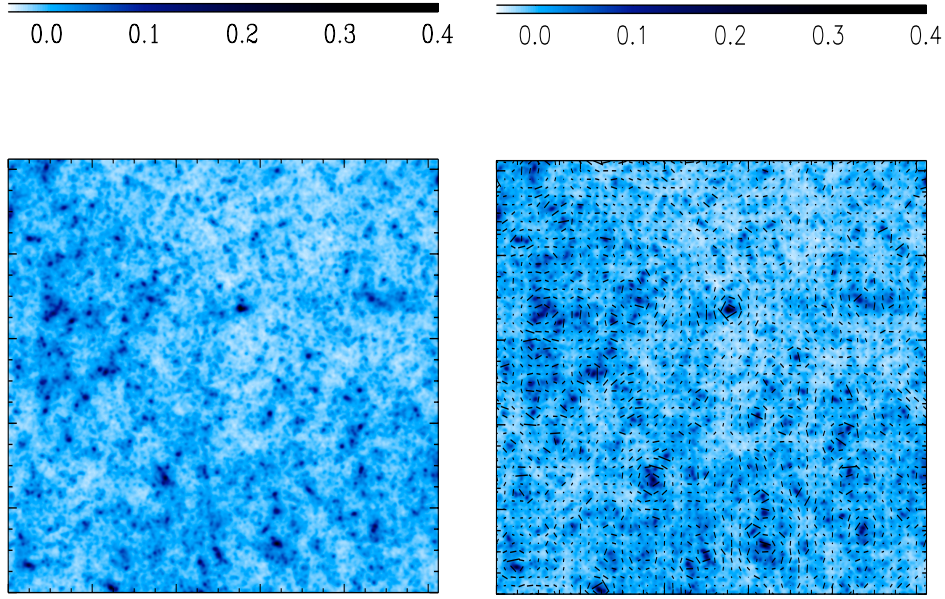


FIG. 2.1 – A gauche : Carte de convergence simulée (Vale and White, 2003) pour un modèle Λ CDM qui couvre une région de $2^\circ \times 2^\circ$ avec 1024×1024 pixels réalisée à partir d’une simulation qui contient 512^3 particules pour une taille de boîte de $300h^{-1}$ Mpc. A droite : Carte de cisaillement superposée à la carte de convergence. La taille et la direction de chaque segment nous donne l’amplitude et la direction du cisaillement à cet endroit du ciel.

où N_1 et N_2 sont les contributions du bruit avec une moyenne égale à zéro et un écart-type égal à $\sigma_n \simeq \sigma_\epsilon^\gamma / \sqrt{N_g}$, où $N_g = n_g A$ est le nombre moyen de galaxies dans un pixel, n_g est le nombre moyen de galaxies par arcmin² et A la taille du pixel en arcmin². σ_ϵ^γ est l’erreur sur la mesure du cisaillement par galaxie. Les composantes du bruit N_1 et N_2 proviennent de l’erreur sur la mesure de cisaillement et peuvent être modélisées par un bruit blanc Gaussien non-corrélé. Un bruit blanc Gaussien réaliste a donc été rajouté aux cartes de cisaillement simulées (Vale and White 2003). Deux configurations ont été considérées :

- les observations spatiales où $n_g = 100$ gal/arcmin²
- les observations au sol où $n_g = 20$ gal/arcmin²

La densité de galaxies n_g permet d’estimer la variance du bruit σ_n .

Décomposition en modes E et B

On peut facilement dériver une estimation de la distribution de masse par inversion en remarquant que :

$$\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 = 1. \quad (2.15)$$

Comme tout champ de vecteurs, le champ de cisaillement $\gamma_i(\theta)$ peut être décomposé en une composante électrique (E) aussi appelée gradient et une composante magnétique (B). Etant donné que l’effet de lentille gravitationnelle dérive d’un potentiel scalaire (le potentiel Newtonien), on peut facilement montrer que cet effet ne produit que des modes E .

L’estimateur des moindres carrés $\hat{\kappa}_n^{(E)}$ de la convergence $\hat{\kappa}$ dans le domaine de Fourier est défini par :

$$\hat{\kappa}_n^{(E)} = \hat{P}_1 \hat{\gamma}_{1n} + \hat{P}_2 \hat{\gamma}_{2n}. \quad (2.16)$$

La relation entre cet estimateur et la vraie carte de convergence est $\hat{\kappa}_n^{(E)} = \hat{\kappa} + \hat{N}$, où $\hat{N} = \hat{P}_1 \hat{N}_1 + \hat{P}_2 \hat{N}_2$.

Remarquons que pour retrouver κ à partir de γ_1 (resp. γ_2), il y a une dégénérescence quand $k_1^2 = k_2^2$ (resp. quand $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$). Par conséquent, la valeur moyenne de κ ne peut pas être récupérée à partir des cartes de cisaillement. Ceci découle du problème de dégénérescence de masse (voir [Bartelmann 1995](#)).

Contrairement aux effets de lentille gravitationnelle, les erreurs systématiques qui peuvent provenir d'une mauvaise correction de la PSF instrumentale ou d'aberrations liées au télescope génèrent à la fois des modes E et B . L'existence de modes B dans la solution est ainsi couramment utilisée pour tester la présence d'effets systématiques non corrigés dans les observations. La décomposition du champ de cisaillement dans chacune de ces composantes peut être facilement réalisée en remarquant qu'un mode B pur peut être transformé en un mode E pur par une simple rotation du champ de cisaillement de 45° : $\gamma'_1 = -\gamma_2$, $\gamma'_2 = \gamma_1$. Par conséquent, on peut construire un estimateur des modes B du champ de convergence comme suit :

$$\hat{\kappa}_n^{(B)} = \hat{P}_2 \gamma'_{1n} - \hat{P}_1 \gamma'_{2n}, \quad (2.17)$$

qui doit être égal à zéro en l'absence de systématiques.

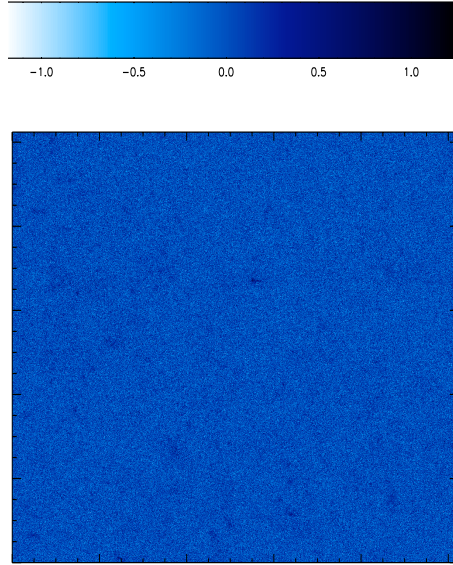


FIG. 2.2 – Carte de convergence bruitée $\kappa_n^{(E)}$ avec $n_g = 100$ gal/arcmin² reconstruite à partir des mesures de cisaillement, correspondant à des observations spatiales avec une erreur de mesure $\sigma_\epsilon^\gamma = 0.3$ arcsec⁻¹. Même pour des observations spatiales qui sont censées être moins bruitées, la carte de convergence non filtrée est dominée par le bruit.

Comme il découle de l'équation 2.15, le bruit $N^{(E)}$ et $N^{(B)}$ dans $\hat{\kappa}_n^{(E)}$ et $\hat{\kappa}_n^{(B)}$ est encore blanc, Gaussien et non-corrélé. Le filtrage inverse n'amplifie pas le bruit, mais $\hat{\kappa}_n^{(E)}$ et $\hat{\kappa}_n^{(B)}$ peuvent être dominés par le bruit si $N^{(E)}$ et $N^{(B)}$ sont grands, ce qui est le cas en pratique. La Fig. 2.2 représente ainsi la carte de convergence que l'on obtient pour des observations spatiales quand un bruit blanc Gaussien réaliste est ajouté aux cartes de cisaillement. Comme attendu, la carte de convergence est dominée par le bruit. La variance du bruit est de $\sigma_n = 0.256$ alors qu'elle est de $\sigma_n = 0.576$ pour des observations au sol si on garde la même taille de pixel.

Pour utiliser l'effet de lentille gravitationnelle faible pour cartographier la distribution de matière noire, il faut parvenir à réduire le bruit des cartes de convergence. Dans le paragraphe §2.3, nous présentons les méthodes de filtrage qui sont utilisées habituellement. Et dans le chapitre §5.1.1, nous décrivons une nouvelle méthode de filtrage que nous avons développée en utilisant une approche multi-échelles. Intéressons nous maintenant aux déformations du 2^{ème} ordre, appelées "flexion" que nous avons décrit §1.2.3.

2.2.2 L'inversion au 2^{ème} ordre

La plupart du temps les variations du champ gravitationnel de la lentille sont supposées négligeables sur une image. Cependant, il a été montré récemment (Irwin and Shmakova 2005; Goldberg and Bacon 2005; Bacon et al. 2006) que ces variations dans le champ peuvent générer une "flexion" c'est-à-dire une courbure dans l'image de la galaxie dans la région intermédiaire entre les effets gravitationnels faibles et les effets gravitationnels forts. On peut ainsi utiliser à la fois la mesure de cisaillement gravitationnel et la mesure de flexion des images de galaxies pour reconstruire la distribution de masse de la lentille. L'estimation de la flexion peut se faire comme dans le cas du cisaillement gravitationnel grâce aux shapelets, (Goldberg and Bacon 2005; Bacon et al. 2006; Massey et al. 2007c). Une autre méthode appelée HOLIC (pour Higher Order Lensing Image's Characteristics) utilisant les moments de l'image de la galaxie plutôt qu'une base de fonction pour estimer la flexion a été proposée par Okura et al. (2007). Goldberg and Leonard (2007) a montré que cette méthode était plus robuste que les shapelets pour estimer la flexion en présence de bruit.

Le problème d'inversion au 2^{ème} ordre pour les lentilles gravitationnelles consiste à reconstruire la distribution de masse projetée $\kappa(\theta)$ à partir de la flexion $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{G}$. Commençons d'abord par la 1^{ère} composante de flexion $\mathcal{F}$, en prenant la transformation de Fourier de l'équation 1.30, on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_1 &= -ik_1\hat{\kappa}(k), \\ \hat{\mathcal{F}}_2 &= -ik_2\hat{\kappa}(k).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Par inversion de ces deux termes, on peut dériver la formule suivante qui permet d'estimer la convergence κ de manière optimisée :

$$\hat{\kappa} = \frac{ik_1}{k_1^2 + k_2^2}\hat{\mathcal{F}}_1(k) + \frac{ik_2}{k_1^2 + k_2^2}\hat{\mathcal{F}}_2(k).\tag{2.19}$$

Nous pouvons dériver le même type de relation pour la 2^{ème} composante de flexion $\mathcal{G}$. En utilisant, l'équation 1.31, on peut écrire $\mathcal{G}$ comme une fonction du potentiel gravitationnel Ψ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= (\partial_1^3 - 3\partial_1\partial_2^2)\Psi, \\ \mathcal{G}_2 &= (3\partial_1^2\partial_2 - \partial_2^3)\Psi.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Par transformation de Fourier on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}_1 &= i(k_1^3 - 3k_1k_2^2)\hat{\Psi}, \\ \hat{\mathcal{G}}_2 &= i(3k_1^2k_2 - k_2^3)\hat{\Psi}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Comme précédemment, par inversion de ces deux termes, on peut dériver la formule suivante qui permet d'estimer la convergence κ de manière optimisée :

$$\hat{\kappa} = i \frac{k_1^3 - 3k_1k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \hat{\mathcal{G}}_1 + i \frac{k_2^3 - 3k_1^2k_2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \hat{\mathcal{G}}_2. \quad (2.22)$$

En utilisant les relations 2.16, 2.19 et 2.22, on peut dériver un estimateur de la convergence κ .

Comme pour les cartes de cisaillement un bruit de mesure se rajoute aux cartes de flexion réelles. Il a été montré par [Okura et al. \(2007\)](#) que la mesure de la flexion $\mathcal{G}$ était plus bruitée que celle de la flexion $\mathcal{F}$. Dans cette étude, nous utiliserons $\mathcal{F}$. Les relations entre les données observées $\mathcal{F}_{1n}$, $\mathcal{F}_{2n}$ pixélisées d'une région A et la vraie carte de convergence κ sont ainsi données par :

$$\mathcal{F}_{iN} = \partial_i \kappa + N_i, \quad (2.23)$$

où N_1 et N_2 sont les contributions de bruit avec une moyenne égale à zéro et un écart-type égal à $\sigma_n = \sigma_\epsilon^\mathcal{F} / \sqrt{N_g}$. L'erreur sur la mesure de la flexion par galaxie $\sigma_\epsilon^\mathcal{F}$ est comprise entre $\sigma_\epsilon^\mathcal{F} = 0.01 \text{ arcsec}^{-1}$ (à $z = 0$) et $\sigma_\epsilon^\mathcal{F} = 0.1 \text{ arcsec}^{-1}$ (à $z = 1$). On choisit $\sigma_\epsilon^\mathcal{F} \simeq 0.04 \text{ arcsec}^{-1}$ comme [Bacon et al. \(2006\)](#), ce qui est une valeur assez optimiste selon l'auteur. On retrouve ce bruit dans la carte de convergence κ_n .

Fig. 2.3, on peut voir une carte de convergence reconstruite à partir des mesures de flexion $\mathcal{F}$. La carte de convergence est bruitée par un bruit Gaussien coloré dont la puissance du bruit est inversement proportionnelle à la fréquence k .

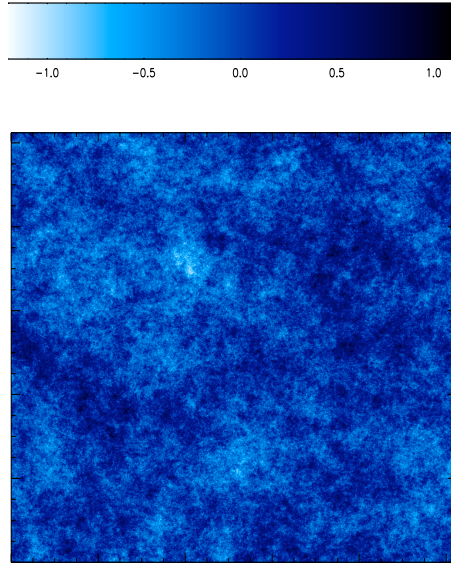


FIG. 2.3 – Carte de convergence bruitée κ_n avec $n_g = 100 \text{ gal/arcmin}^2$ reconstruite à partir des mesures de flexion $\mathcal{F}_{i,N}$ avec une erreur de mesure $\sigma_\epsilon^\mathcal{F} \simeq 0.04 \text{ arcsec}^{-1}$

2.2.3 Comparaison

D'après [Bacon et al. \(2006\)](#), la flexion devrait permettre de mieux reconstruire les échelles les plus fines des amas que ne le permet le cisaillement. En effet, les effets de flexion sont des déformations d'un ordre supérieur du potentiel gravitationnel, ils doivent donc permettre de sonder la distribution de masse avec un peu plus de précision. Mais, qu'en est-il quand le bruit de mesure se rajoute aux données ?

Les caractéristiques du bruit de cisaillement

L'erreur de mesure dans l'estimation du cisaillement des galaxies en arrière-plan se traduit par un bruit additif Gaussien sur chaque composante du cisaillement (voir l'équation 2.14). L'écart-type sur la mesure du cisaillement par galaxie σ_ϵ^γ vient d'une part des erreurs de mesure et d'autre part de la forme intrinsèque des galaxies. La valeur (standard) de cet écart-type est $\sigma_\epsilon^\gamma \simeq 0.3$ (Brainerd et al. 1996). Pour obtenir une carte de cisaillement avec une erreur égale ou inférieure à 10%, pour chaque pixel, il nous faut faire une moyenne sur un nombre N_g de galaxies déterminé par :

$$\frac{\sigma_\epsilon^\gamma}{\sqrt{N_g}} \simeq \frac{0.3}{\sqrt{N_g}} \lesssim 0.1. \quad (2.24)$$

Donc $N_g \gtrsim 10$. Considérant le théorème de la limite centrale, cela signifie que pour des pixels de taille $A \gtrsim 1 \text{ arcmin}^2$, le bruit N_i peut-être considéré Gaussien dans les deux cas et non-corrélé en faisant une bonne approximation. On retrouve ce bruit dans la carte de convergence κ_n sous forme d'un bruit blanc Gaussien additif :

$$\kappa_n = \kappa + N. \quad (2.25)$$

Les caractéristiques du bruit de flexion

L'erreur de mesure dans l'estimation de la flexion des galaxies en arrière-plan se traduit par un bruit additif Gaussien sur chaque composante de flexion $\mathcal{F}$ (voir l'équation 2.23). L'écart-type sur la mesure de la flexion par galaxie $\sigma_\epsilon^\mathcal{F}$ vient essentiellement des erreurs de mesure. La valeur choisie pour cet écart-type est $\sigma_\epsilon^\mathcal{F} \simeq 0.04$ (Bacon et al. 2006). L'erreur de mesure dans l'estimation de la flexion des galaxies en arrière-plan se traduit par un bruit additif Gaussien coloré en $1/k$ sur la carte de convergence κ_n (Fig. 2.3) :

$$\kappa_n = \kappa + \frac{N}{k}. \quad (2.26)$$

Comparaison entre le bruit de cisaillement et le bruit de flexion

Nous avons ensuite essayé de trouver pour quelle échelle la flexion devenait meilleure que le cisaillement. Pour cela, nous avons tracé le spectre de puissance du bruit de cisaillement et celui de flexion sur la même figure et nous avons cherché le point de croisement, voir Fig. 2.4. Le spectre de puissance du bruit de cisaillement est le même pour toutes les fréquences car c'est un bruit blanc. Par contre le spectre de puissance de la flexion est inversement proportionnel à la fréquence k .

Pour trouver le point de croisement de ces deux droites, nous avons repris les équations 2.16 et 2.19 pour calculer le spectre de puissance du bruit du cisaillement et de la flexion. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} |\tilde{N}_B^\gamma|^2 &= \left(\frac{\sigma_\epsilon^\gamma}{\sqrt{n_g^\gamma}} \right)^2, \\ |\tilde{N}_B^\mathcal{F}|^2 &= \left(\frac{\sigma_\epsilon^\mathcal{F}}{\sqrt{n_g^\mathcal{F} k}} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

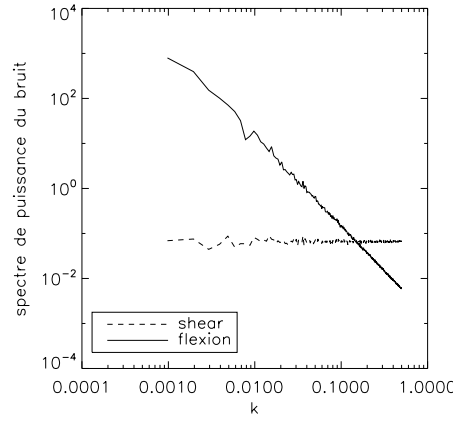


FIG. 2.4 – Spectre de puissance du bruit de cisaillement superposé à celui du bruit de flexion obtenus à partir de cartes simulées

Le point de croisement k^T est donc défini comme suit :

$$k^T = \frac{\sigma_\epsilon^{\mathcal{F}}}{\sigma_\epsilon^\gamma} \sqrt{\frac{n_g^\gamma}{n_g^{\mathcal{F}}}}. \quad (2.28)$$

Donc, la flexion devient intéressante pour des fréquences $k > k^T$. Si on considère les valeurs standards de σ_ϵ^γ et $\sigma_\epsilon^{\mathcal{F}}$ et que l'on considère que le nombre de galaxies par arcmin² est le même dans la mesure de cisaillement et de flexion, cela correspond à des échelles de 7". Or, comme on l'a montré avec l'équation 2.24, un pixel doit être composé d'une dizaine de galaxies. En se plaçant dans un cas optimiste d'observations spatiales où le nombre de galaxies par arcmin² est de l'ordre de 100. On peut en déduire que les pixels de notre carte de masse κ doivent être de l'ordre de 20". Ce résultat permet de conclure que la flexion ne peut être utilisée pour la cartographie de matière noire car celle-ci devient intéressante pour des échelles plus petites que le pixel. Il faudrait une sensibilité telle que l'on ait plus de 700 galaxies par arcmin² pour que celle-ci devienne intéressante.

Dans l'article de [Bacon et al. \(2006\)](#), les auteurs reconstruisent une carte de convergence d'un amas simulé à partir de la mesure de flexion. Mais après discussion, les auteurs ont relevé une erreur dans la partie reconstruction de masse qui les a fait sous-estimer d'un facteur 6 le bruit dans les cartes de flexion. Dans l'article de [Okura et al. \(2007\)](#), les auteurs proposent aussi de reconstruire une carte de convergence d'un amas simulé à partir de la mesure de flexion cette fois-ci encore c'est l'erreur sur la mesure de la flexion $\sigma_\epsilon^{\mathcal{F}}$ qui est très optimiste comme le disent les propres auteurs. En effet, les auteurs choisissent $\sigma_\epsilon^{\mathcal{F}} = 0.009$ que l'on peut comparer avec $\sigma_\epsilon^{\mathcal{F}} = 0.04$, adopté par les auteurs de [Bacon et al. \(2006\)](#) déjà qualifié de plutôt optimiste. Typiquement la flexion domine pour des échelles beaucoup plus petites que le cisaillement. Pour utiliser la flexion pour la reconstruction de cartes de matière noire, certains groupes ont recours à des modèles d'amas ([Leonard et al. 2007](#)). Chaque amas reconstruit est ainsi modélisé avec le profil de flexion associé. Une autre possibilité qui est également utilisé dans [Leonard et al. \(2007\)](#) consiste à réduire l'erreur sur la mesure de la flexion $\sigma_\epsilon^{\mathcal{F}}$ en additionnant plusieurs images ce qui est couramment appelé "stacking". Cependant, même en utilisant un modèle d'amas pour reconstruire la distribution de masse et en faisant du "stacking", seul l'amas abell 1689, qui est l'amas qui produit les effets gravitationnels les plus importants, a pu être reconstruit en utilisant la flexion. Pour cet amas, le nombre de galaxies brillantes présentes sur le champ et donc utilisables pour mesurer la flexion est assez important dû à l'effet de magnification.

Le cisaillement reste donc l'effet de lentille gravitationnelle faible le plus utilisé pour reconstruire la distribution de matière noire.

2.3 Filtrage des cartes de convergence pour cartographier la matière noire

Les cartes de convergence obtenue par inversion des cartes de cisaillement sont dominées par la présence d'un bruit blanc Gaussien qui provient entre autres de l'erreur sur la mesure du cisaillement. Dépendant de l'application, il est parfois nécessaire de filtrer la carte de matière noire par exemple, pour faire des analyses conjointes avec des données obtenues avec d'autres techniques que l'effet de cisaillement gravitationnel (corrélations CMB-cisaillement gravitationnel,...) ou pour analyser la distribution de matière noire (distribuée en filaments, vide et amas) (voir §5.2). Un filtrage qui tient compte des caractéristiques du bruit est donc nécessaire pour estimer au mieux la distribution de matière noire.

2.3.1 Les filtres linéaires standards

Dans cette section, la carte de convergence bruitée $\tilde{\kappa}_n$ estimée par inversion des cartes de cisaillement sera notée simplement κ_n pour ne pas la confondre avec la carte de convergence obtenue après filtrage $\tilde{\kappa}$.

Le filtre Gaussien

Le filtre Gaussien est un filtre linéaire qui appartient à la classe des filtres passe-bas c'est-à-dire qu'il ne laisse passer que les basses fréquences de l'image. Le résultat est une carte plus ou moins lissée dépendant de la largeur du filtre. La méthode standard ([Kaiser and Squires 1993](#)) consiste à faire le produit de convolution (noté $*$) entre la carte de convergence bruitée κ_n (voir §2.2.1) et une fonction Gaussienne G de largeur σ :

$$\tilde{\kappa}_g = G_\sigma * \kappa_n = G_\sigma * P_1 * \gamma_{1n} + G_\sigma * P_2 * \gamma_{2n}, \quad (2.29)$$

où G_σ est une fonction Gaussienne :

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.30)$$

La procédure est assez simple et rapide. La raison principale qui fait que l'on utilise souvent le filtre Gaussien comme fenêtre de lissage est liée à sa réponse fréquentielle qui est elle même une Gaussienne. Contrairement à certains filtres passe-bas dont la réponse fréquentielle présente des oscillations parasites que l'on appelle oscillations de Gibbs. Avec le filtre Gaussien, en choisissant l'échelle de lissage σ , on connaît ainsi parfaitement la gamme de fréquences qui reste après lissage.

La qualité du résultat dépend fortement de la valeur de σ qui détermine le degré de lissage. Sur la Fig. 2.5 on peut voir comment évolue l'erreur en fonction de σ entre la carte de convergence originale simulée κ que l'on peut voir sur la Fig. 2.1 (à gauche) et la carte de convergence filtrée $\tilde{\kappa}_g$. Pour cette simulation, la valeur optimale de σ se situe entre 5 et 10 pixels pour les observations spatiales et entre 20 et 25 pixels pour les observations au sol. Fig. 2.6, on peut voir le résultat de la reconstruction en utilisant les valeurs optimales pour σ . Le résultat est plus ou moins lissé et les structures sont plus ou moins étalées dépendant de la quantité de bruit initial dans les cartes.

Le désavantage du filtre Gaussien vient de sa forme fixe que l'on ne peut pas adapter pour choisir d'atténuer plus ou moins une fréquence. Ce type de filtrage ne permet que de jouer sur la largeur du filtre.

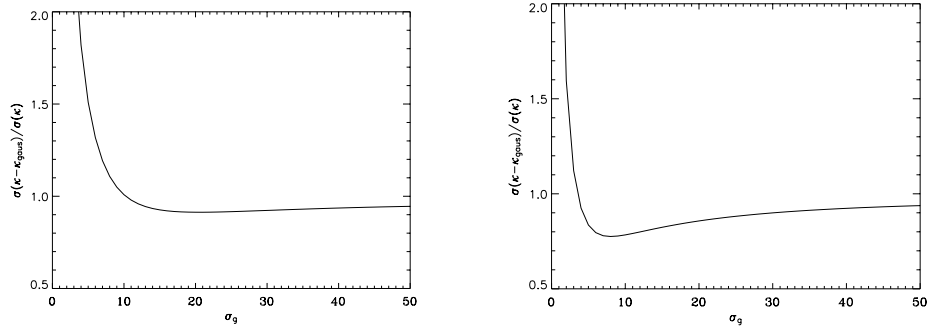


FIG. 2.5 – Erreur de reconstruction en fonction de la largeur de la Gaussienne σ en pixels (avec 1 pixel = 0.12 arcmin) utilisée pour le filtre Gaussien, avec $n_g = 20$ gal/arcmin² (à gauche) et $n_g = 100$ gal/arcmin² (à droite).

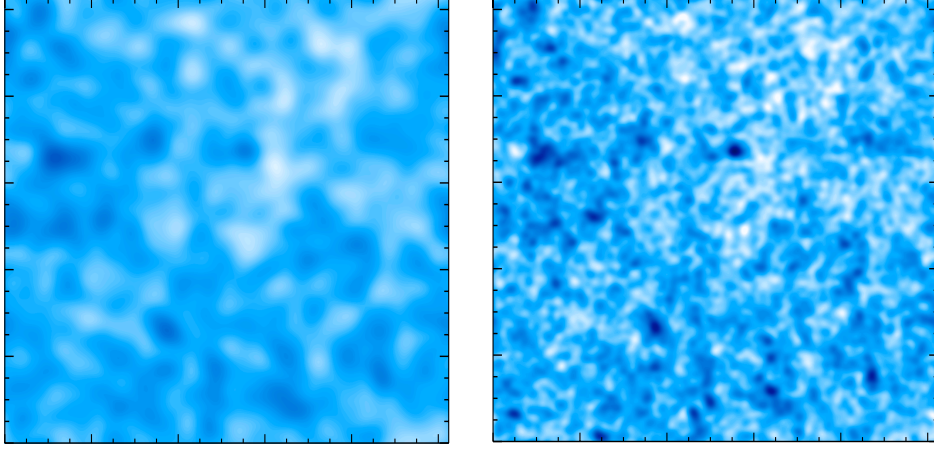


FIG. 2.6 – Reconstruction avec le filtre Gaussien (à gauche) pour des observations au sol (avec $\sigma = 22$) et (à droite) pour des observations spatiales (avec $\sigma = 8$) pour la région de $2^\circ \times 2^\circ$.

Le filtre de Wiener

Une alternative au filtre Gaussien est le filtre de Wiener :

$$\tilde{\kappa}_w = w * \kappa_n, \quad (2.31)$$

que l'on obtient en pondérant chaque mode (fréquence) k avec le poids suivant :

$$\hat{w}(k) = \frac{|\hat{\kappa}(k)|^2}{|\hat{\kappa}(k)|^2 + |\hat{N}(k)|^2}, \quad (2.32)$$

où $|\hat{N}(k)|^2$ est le spectre de puissance du bruit et $|\hat{\kappa}(k)|^2$ est le spectre de puissance du signal (sans bruit).

En pratique, on ne connaît ni le bruit, ni le signal. On fait alors l'hypothèse que le bruit est additif et qu'il peut être modélisé par un processus aléatoire stationnaire (invariant par translation dans l'espace) c'est-à-dire par un bruit blanc Gaussien. L'équation ci-dessous peut alors se réécrire :

$$\hat{w}(k) = \frac{|\hat{\kappa}_n(k)|^2 - |\hat{N}(k)|^2}{|\hat{\kappa}_n(k)|^2}. \quad (2.33)$$

On obtient ainsi la forme du filtre de Wiener dans l'espace fréquentiel. Sur la Fig. 2.7, nous avons tracé le filtre de Wiener obtenu pour la carte de convergence bruitée représentée Fig. 2.2 et nous l'avons comparé avec la forme du filtre Gaussien utilisé précédemment pour filtrer cette même carte.

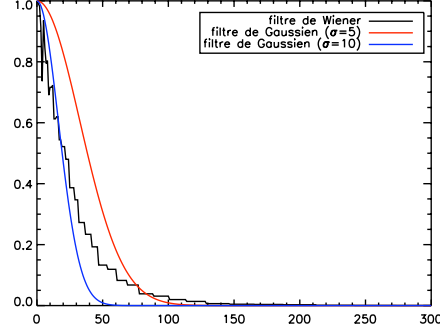


FIG. 2.7 – Comparaison entre le filtre de Wiener et le filtre Gaussien pour plusieurs largeurs de Gaussiennes.

Comme on peut le voir, le filtre Gaussien qui se rapproche le plus du filtre de Wiener a une largeur entre 5 et 10 pixels, ce qui est en accord avec les conclusions précédentes. On remarque que le filtre de Wiener que l'on obtient présente des discontinuités. Celles-ci sont dues à notre traitement. Si on calculait le poids de Wiener $\hat{w}$ en utilisant la formule 2.33, le filtre de Wiener aurait des variations encore plus brutales liées au bruit pouvant générer des artefacts sur l'image. En pratique, on réduit le bruit du filtre en estimant le poids de Wiener moyen sur des anneaux concentriques de largeur d . On utilise ainsi le fait que l'Univers est isotrope.

Un point important du filtre de Wiener est qu'il est estimé à partir du spectre de puissance du bruit et du signal. Sachant que les statistiques à deux points telles que le spectre de puissance ne permettent d'analyser que la partie Gaussienne d'un signal, le filtre de Wiener ne devient optimal que si le signal et le bruit suivent une distribution Gaussienne. Dans notre cas, le bruit est effectivement Gaussien. Par contre, le signal ne vérifie pas cette condition comme on peut le voir sur la Fig. 2.1. Les amas de galaxies notamment sont des structures fortement non-Gaussiennes.

Sur la Fig. 2.8 on peut voir que le filtre de Wiener permet de bien reconstruire les structures à grandes échelles qui sont Gaussiennes. Par contre, les amas de galaxies qui sont clairement des structures non-Gaussiennes sont mal reconstruits. On s'aperçoit en effet que le nombre de fausses détections (c'est-à-dire d'amas de galaxies faussement reconstruits) n'est pas négligeable et que la photométrie des amas de galaxies est mauvaise.

Nous venons de voir que les filtres linéaires ne permettent pas de filtrer de manière optimale nos cartes de matière noire. Au mieux, le filtre de Wiener nous permet de reconstruire les structures à grandes échelles mais les amas de galaxies sont mal reconstruits. Or, ces amas de galaxies sont très importants pour contraindre la cosmologie car ils permettent de mieux comprendre les processus non-linéaires de formation des structures par effondrement gravitationnel. Et, de par leur taille, ils sont les structures non-Gaussiennes les plus facilement analysables. Après avoir fait un tour rapide des filtres linéaires nous allons maintenant nous intéresser à un autre type de filtres : les filtres non-linéaires.

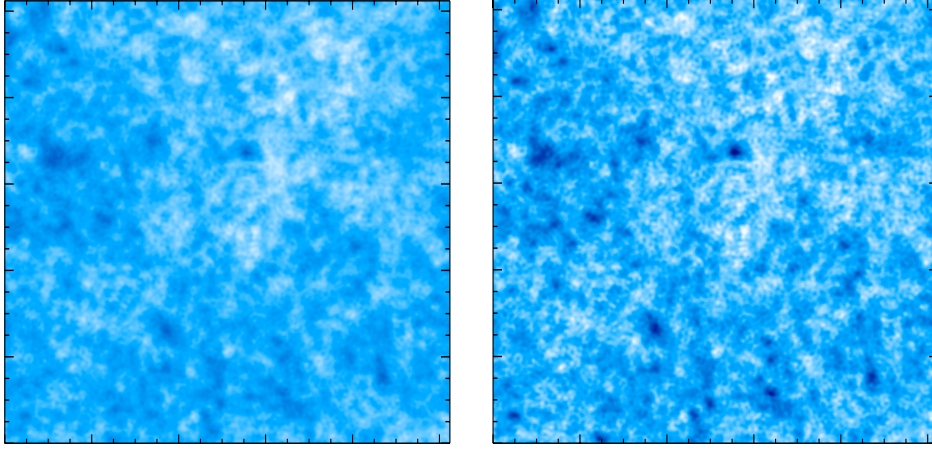


FIG. 2.8 – Reconstruction avec le filtre de Wiener pour des observations au sol (à gauche) et pour des observations spatiales (à droite) pour la région de $2^\circ \times 2^\circ$.

2.3.2 Un filtrage non-linéaire standard : MEM

La méthode du Maximum d'Entropie connue sous l'acronyme MEM est largement utilisée en analyse d'images en astrophysique (cf. [Bridle et al. 1998](#); [Starck et al. 2001](#); [Marshall et al. 2002](#); [Starck and Murtagh 2002](#); [Thiébaud and Mugnier 2006](#), pour une description détaillée).

Cette méthode considère les données et la solution comme des fonctions de densité de probabilité et cherche une solution en utilisant une approche Bayésienne. Pour décrire cette méthode, une introduction à l'analyse Bayésienne est nécessaire. Dans l'approche Bayésienne, on tient compte de l'information que l'on possède a priori sur le système étudié, et on donne un rôle central au théorème de Bayes :

$$P(\kappa|\kappa_n) = \frac{P(\kappa_n|\kappa)P(\kappa)}{P(\kappa_n)}. \quad (2.34)$$

Dans cette expression, les différents termes peuvent s'interpréter de la manière suivante :

- $P(\kappa_n|\kappa)$ représente la vraisemblance d'observer les données κ_n étant donnée la carte de convergence estimée κ .
- $P(\kappa_n)$ représente la probabilité des données κ_n a priori. Ce terme qui est appelé évidence est tout simplement une constante qui ne dépend que du bruit car tous les modèles pour les données sont équiprobables.
- $P(\kappa)$ représente la probabilité a priori sur la carte de convergence estimée κ . Ce terme traduit nos attentes sur la distribution de la convergence avant même d'acquérir les données κ_n .
- $P(\kappa|\kappa_n)$, enfin, est appelée probabilité à posteriori.

Dans cette approche, on estime la carte de convergence $\tilde{\kappa}$ en maximisant $P(\kappa|\kappa_n)$ ce qui revient à maximiser $P(\kappa_n|\kappa)P(\kappa)$ car $P(\kappa_n)$ est simplement un facteur de normalisation. En statistique, cette méthode est appelée la méthode du maximum a posteriori (MAP) et la méthode MEM est une application de ce principe.

On remarque que si on n'a aucun a priori sur le modèle (c'est-à-dire sur la carte de convergence κ) avant d'acquérir les données κ_n , tous les modèles sont équiprobables et $P(\kappa)$

devient une constante. Et la recherche du maximum a posteriori se confond avec la recherche du maximum de vraisemblance. Par contre, si on a un certain a priori sur le modèle, ces deux approches divergent.

Dans cette approche on cherche à maximiser $P(\kappa|\kappa_n)$, ou autrement dit à minimiser la quantité ($\mathcal{Q}$) qui mesure la quantité d'information dans l'image :

$$\mathcal{Q} = -\log(P(\kappa|\kappa_n)) = -\log(P(\kappa_n|\kappa)) - \log(P(\kappa)). \quad (2.35)$$

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la forme du premier terme : le terme de vraisemblance. Comme nous l'avons vu §2.2.3, la carte de convergence κ_n obtenue par inversion des composantes du cisaillement peut être modélisée comme suit :

$$\kappa_n = \kappa + N. \quad (2.36)$$

En considérant le fait que le bruit N suit une distribution Gaussienne, le terme de vraisemblance $P(\kappa_n|\kappa)$ que l'on notera $\mathcal{L}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{L} \propto \exp \left[-\frac{1}{2} (\kappa_n - \kappa)^T C^{-1} (\kappa_n - \kappa) \right], \quad (2.37)$$

où C est la matrice de variance-covariance du bruit. Si les données sont corrélées il est ainsi facile d'incorporer cette corrélation dans la matrice de covariance du bruit. Habituellement, on suppose qu'il n'y a pas de corrélation, et la matrice de covariance devient diagonale. Les termes diagonaux sont donnés par la variance du bruit pour chaque pixel de la carte. La vraisemblance peut ainsi se réécrire en fonction du χ^2 :

$$\mathcal{L} \propto \exp(-\frac{1}{2}\chi^2), \quad (2.38)$$

avec :

$$\chi^2 = \sum_{x,y} \frac{(\kappa_n(x,y) - \kappa(x,y))^2}{\sigma_{\kappa_n}^2}. \quad (2.39)$$

On peut alors réécrire l'équation 2.35 de la manière suivante :

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\chi^2 - \log(P(\kappa)) = \frac{1}{2}\chi^2 - \alpha H, \quad (2.40)$$

où α est une constante et peut être considérée comme un paramètre de régularisation du problème et H représente l'a priori que l'on ajoute à la solution sous forme d'une Entropie entre le signal et le modèle que l'on cherche donc à maximiser.

Il existe plusieurs définitions de l'Entropie. Celle qui est adoptée par la méthode MEM et qui est aussi la plus commune est celle de [Gull and Skilling \(1991\)](#) :

$$H_g(\kappa) = \sum_x \sum_y \kappa(x,y) - m(x,y) - \kappa(x,y) \ln \left(\frac{\kappa(x,y)}{m(x,y)} \right), \quad (2.41)$$

où m est le modèle, on choisit typiquement un fond du ciel. H_g a un maximum global pour $\kappa = m$. Mais cette définition de l'Entropie ne permet pas d'avoir des valeurs négatives dans la solution ce qui n'est pas naturel pour des données de cisaillement gravitationnel ou pour des données CMB où l'on mesure des fluctuations autour de zéro. Pour surmonter ce problème, il a été proposé par [Maisinger et al. \(2004\)](#) de remplacer H_g par :

$$H_{+/-}(\kappa) = \sum_x \sum_y \psi(x, y) - 2m - \kappa(x, y) \ln \left(\frac{\psi(x, y) + \kappa(x, y)}{2m} \right), \quad (2.42)$$

où $\psi(x, y) = \sqrt{\kappa^2(x, y) + 4m^2}$. Ici m ne joue pas le même rôle, c'est une constante que l'on fixe avec l'écart-type du signal.

Plus généralement la méthode MEM présente un certain nombre de désavantages (Narayan and Nityananda 1986; Starck et al. 2001) et beaucoup d'améliorations de MEM ont été proposées au fil des années (Weir 1992; Bontekoe et al. 1994; Pantin and Starck 1996; Starck et al. 2001).

De nombreuses méthodes ont été proposées pour filtrer la carte de convergence. Pour autant, il n'existe pas de solution optimale. Au chapitre V, nous proposons une nouvelle méthode de filtrage basée sur les ondelettes qui a montré sa supériorité face aux autres méthodes.

2.4 Estimation de statistiques pour contraindre la cosmologie

Pour contraindre les paramètres cosmologiques, il est nécessaire d'extraire et de quantifier de manière la plus efficace possible l'information résidant dans les observations. Disposant d'une seule réalisation d'Univers par l'observation, seule une étude statistique des caractéristiques de l'Univers permet de faire le lien avec les simulations numériques et les modèles cosmologiques théoriques.

Pour les données de cisaillement gravitationnel, cette étude statistique peut être effectuée, soit sur la carte de cisaillement, soit sur la carte de convergence. Une même analyse statistique doit être réalisée sur les données et sur les modèles théoriques d'Univers. On utilise ensuite des fonctions de vraisemblance pour estimer les erreurs sur les paramètres cosmologiques.

2.4.1 Estimation de statistiques

Les statistiques à deux points

Il existe un grand nombre de manières de contraindre le modèle cosmologique à partir de données obtenues par effet de lentille gravitationnelle mais la plus courante consiste à utiliser des statistiques à deux points sur le champ de cisaillement soit dans l'espace direct soit dans l'espace de Fourier. En général, il y a un avantage à utiliser des statistiques dans l'espace de Fourier comme le spectre de puissance car les modes de Fourier sont indépendants. Le spectre de puissance $P_\kappa(l)$ de la carte de convergence (2D) est défini en fonction des modes l comme suit :

$$\langle \hat{\kappa}(\vec{l}) \hat{\kappa}(\vec{l}') \rangle = (2\pi)^2 \delta(\vec{l} - \vec{l}') P_\kappa(l), \quad (2.43)$$

où $\hat{\kappa}$ est la transformée de Fourier de κ , δ est la fonction delta, les brackets représentent une moyenne sur les l . $P_\kappa(l)$ dépend uniquement de $l = |\vec{l}|$. On peut ainsi tirer profit des algorithmes rapides d'estimation de la transformation de Fourier (FFT) pour estimer rapidement le spectre de puissance.

Ce spectre de puissance $P_\kappa(l)$ peut être exprimé en fonction du spectre de puissance 3D de la matière $P(k, \chi)$, des fluctuations de masse $\delta\rho/\rho$ et en terme des paramètres cosmologiques (voir Refregier 2003b) :

$$P_\kappa(l) = \frac{9}{16} \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 \Omega_m^2 \int d\chi \left[\frac{g(\chi)}{ar(\chi)} \right]^2 P\left(\frac{l}{r}, \chi\right), \quad (2.44)$$

où a est le paramètre d'expansion, H_0 est la constante de Hubble, Ω_m est le paramètre de densité de matière, χ représente la distance comobile, $r = a^{-1}D_A$ avec D_A est la distance de diamètre angulaire et g est la fonction de sensibilité de l'effet de lentille gravitationnelle. Les propriétés de corrélation sont plus commodes dans l'espace de Fourier. Cependant, pour des relevés à géométrie complexe due notamment aux masques associés aux étoiles brillantes les données manquantes ont besoin d'être manipulées correctement (une description des différentes méthodes existantes est disponible dans [Pires et al. 2008b](#)). Ainsi, en présence de données manquantes, les statistiques sont plus facile à estimer dans l'espace direct mais plus longues aussi.

Quelle que soit la statistique à deux points considérée, elle peut facilement être reliée au spectre de puissance de la matière 3D par le biais du spectre de puissance de la carte de convergence $P_\kappa(l)$

- La variance du cisaillement $\langle \gamma^2 \rangle$:

Un exemple de statistique à deux points estimée dans l'espace réel est la variance du champ de cisaillement, qui est définie comme la variance du cisaillement moyen $\bar{\gamma}$ estimée dans des cercles de rayon θ_s . La variance du cisaillement $\langle \gamma^2 \rangle$ est reliée au spectre de puissance de la convergence $P_\kappa(l)$ par la relation suivante :

$$\langle \gamma^2 \rangle = \int \frac{dl}{2\pi} l P_\kappa(l) \frac{J_1^2(l\theta_s)}{(l\theta_s)^2}, \quad (2.45)$$

où J_n est la fonction de Bessel à l'ordre n .

La variance du champ de cisaillement a été utilisée dans un certain nombre d'analyse de données de cisaillement gravitationnel pour contraindre les paramètres cosmologiques ([Maoli et al. 2001](#); [Hoekstra et al. 2006](#); [Fu et al. 2008](#)).

- La fonction de corrélation à deux point (FC2pts) du champ de cisaillement :

La FC2pts du champ de cisaillement est la statistique la plus utilisée parce qu'elle est très simple à implémenter et qu'elle peut être estimée quelle que soit la géométrie du relevé. Elle est définie comme suit :

$$\xi_{i,j}(\theta) = \langle \gamma_i(\vec{\theta}) \gamma_j(\vec{\theta} + \vec{\theta}) \rangle, \quad (2.46)$$

où $i, j = 1, 2$ et la moyenne est réalisée sur des couples de galaxies séparés par un angle $\theta = |\vec{\theta}|$. Par parité $\xi_{1,2} = \xi_{2,1} = 0$ et par isotropie $\xi_{1,1}$ et $\xi_{2,2}$ sont fonctions uniquement de θ . La FC2pts $\xi_{i,j}$ est la transformée de Fourier du spectre de puissance P_κ (en utilisant le théorème de Wiener-Khinchine). Si on considère l'invariance par rotation qui dérive de l'isotropie de l'Univers, la transformation de Fourier devient une transformation de Hankel parfois appelée transformation de Fourier-Bessel :

$$\xi_+(\theta) = \xi_{1,1}(\theta) + \xi_{2,2}(\theta) = \int_0^\infty \frac{dl}{2\pi} l P_\kappa(l) J_0(l\theta), \quad (2.47)$$

où J_0 correspond à la fonction de Bessel à l'ordre zéro.

Cette statistique reste aujourd'hui encore la statistique la plus utilisée. Elle a été utilisée dans un certain nombre d'études récentes de cisaillement gravitationnel pour contraindre le modèle cosmologique ([Benjamin et al. 2007](#); [Hoekstra et al. 2006](#); [Fu et al. 2008](#)). L'implémentation la plus simple qui consiste à compter le nombre de couple de galaxies d'arrière-plan séparées par une distance d possède une complexité de $O(N^2)$ ce qui commence à devenir une lourde tâche quand il s'agit de traiter des zones du ciel de plus en plus étendues. Récemment, des progrès ont été faits dans ce

domaine, des méthodes ont été développées pour accélérer les algorithmes de calcul de la FC2pts, permettant ainsi de réduire leur complexité à environ $O(N \log N)$. Ce type d'algorithme est basé sur la construction d'un arbre binaire de recherche qui devient ensuite une structure très utile pour parcourir les couples de galaxies (voir [Zhang and Pen 2005](#); [Moore et al. 2001](#)). Mais, pour atteindre une complexité de $O(N \log N)$ il faut malheureusement passer par des approximations en ne considérant par exemple que les petites échelles. Si toutes les échelles sont considérées, la complexité de cet algorithme tend vers celle de l'implémentation naïve. Une autre approximation, souvent utilisée, consiste à intégrer la fonction de corrélation sur des intervalles d'une distance donnée on obtient ainsi une version lissée de la fonction de corrélation comme dans [Jarvis et al. \(2004\)](#); [Zhang and Pen \(2005\)](#).

- La variance de l'ouverture de masse M_{ap} :

La variance de l'ouverture de masse M_{ap} a été introduite par [Schneider et al. \(1998\)](#). L'ouverture de masse définit une classe de statistiques associée à des filtres. Plusieurs formes de filtres ont été suggérées, qui sont un compromis entre la localisation dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier. En considérant le filtre qui a été défini par [Schneider \(1996\)](#) ayant pour échelle θ_s , la variance de l'ouverture de masse peut s'exprimer en fonction du spectre de puissance du champ de convergence 2D de la manière suivante :

$$\langle M_{ap}^2(\theta_s) \rangle = \int \frac{dl}{2\pi} l P_\kappa(l) \frac{576 J_4^2(l\theta_s)}{(l\theta_s)^4}. \quad (2.48)$$

Cette statistique a également été utilisée dans un certain nombre d'analyses de données réelles en cisaillement gravitationnel pour contraindre les paramètres cosmologiques ([Van Waerbeke et al. 2002](#); [Semboloni et al. 2006](#); [Hoekstra et al. 2006](#); [Fu et al. 2008](#)).

Les statistiques à deux points permettent d'avoir des contraintes intéressantes sur l'amplitude des fluctuations du spectre de puissance de la matière : σ_8 , dont le cisaillement gravitationnel dépend fortement.

Mais les contraintes que l'on dérive entre σ_8 et Ω_m , qui correspond à la densité de matière de l'Univers, sont jointes comme on peut le voir sur la Fig. 2.9 qui montre les contraintes sur les paramètres cosmologiques dérivées par [Hoekstra et al. \(2002\)](#) à partir du cisaillement gravitationnel du relevé RCS. Cette dégénérescence entre σ_8 et Ω_m est classique en cisaillement gravitationnel lorsque l'on utilise uniquement les statistiques d'ordre deux pour contraindre les paramètres cosmologiques.

Les statistiques à deux points sont insuffisantes pour caractériser les structures non-Gaussiennes de la distribution de matière. Or, ces non-Gaussianités produites par l'évolution non-linéaire de l'Univers sont très importantes pour comprendre la physique de l'Univers et pour discriminer entre les différents modèles cosmologiques possibles.

Les statistiques non-Gaussiennes

Dans le modèle standard de formation des structures, les fluctuations primordiales initialement Gaussiennes sont amplifiées par une instabilité gravitationnelle pour produire une distribution de matière finale qui est fortement non-Gaussienne. Excepté à très grande échelle, le champ de convergence est donc fortement non-Gaussien. A petite échelle, nous avons des structures telles que les galaxies ou les amas de galaxies, à des échelles un peu plus grandes, on observe les structures filamenteuses associées à l'organisation à grande échelle de la distribution de matière. La détection de ces non-Gaussianités dans les cartes de convergence peut être très utile pour contraindre les paramètres du modèle cosmologique.

La fonction de corrélation à trois points (FC3pts) $\xi_{i,j,k}$ est la statistique d'ordre le plus bas qui peut être utilisée pour détecter de la non-Gaussianité. Par analogie avec les statistiques à

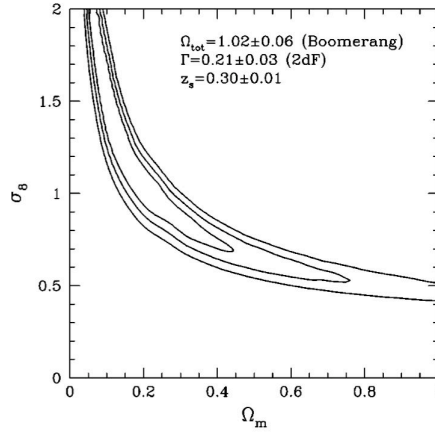


FIG. 2.9 – Contraintes sur les paramètres cosmologiques obtenues par Hoekstra, Yee and Gladders (2002) à partir du relevé RCS. Le diagramme représente les contraintes jointes entre le paramètre de densité en matière Ω_m (en abscisse) et le paramètre d'amplitude des fluctuations σ_8 (en ordonnées) pour un modèle Λ CDM. Des a priori sur le CMB et les relevés de galaxies sont utilisés pour marginaliser sur Ω_{tot} , Γ et la distribution en *redshift* des sources z_s . Les contours représentent les niveaux de confiance à 68.3%, 95.4% et 99.9%.

deux points, les statiques à trois points sont toutes reliées à la fonction de corrélation à trois points $\xi_{i,j,k}$ ou à son analogue dans l'espace de Fourier, le bispectre B_κ .

$$\xi_{i,j,k}(\theta) = \langle \kappa(\vec{\theta}_1) \kappa(\vec{\theta}_2) \kappa(\vec{\theta}_3) \rangle. \quad (2.49)$$

L'implémentation la plus simple de la FC3pts consiste à compter le nombre de triangle de coté d_1, d_2, d_3 . Elle nécessite $O(N^3)$ opérations et ne peut par conséquent être considérée pour des futurs relevés grand champ. On utilise souvent la configuration équilatérale pour laquelle le triangle formé par les trois galaxies est équilatéral est vérifiée : $d_1 = d_2 = d_3 = d$. Cette FC3pts dépend ainsi uniquement de la distance d . La configuration équilatérale est ainsi devenue un standard dans l'analyse de données de cisaillement gravitationnel d'une part, car elle est plus simple à interpréter et d'autre part, son estimation est beaucoup plus rapide.

Dans l'espace de Fourier la FC3pts, elle est appelée bispectre. Nous supposons que le champ κ est statistiquement isotrope, ainsi le bispectre dépend uniquement des distances $|\vec{l}_1|$, $|\vec{l}_2|$ and $|\vec{l}_3|$:

$$B_\kappa(|\vec{l}_1|, |\vec{l}_2|, |\vec{l}_3|) \propto \langle \hat{\kappa}(|\vec{l}_1|) \hat{\kappa}(|\vec{l}_2|) \hat{\kappa}^*(|\vec{l}_3|) \rangle, \quad (2.50)$$

où $\hat{\kappa}^*$ représente le complexe conjugué de $\hat{\kappa}$.

Si on considère la configuration équilatérale, les triangles doivent vérifier : $l_1 = l_2 = l_3 = l$ et le bispectre dépend uniquement de l :

$$B_\kappa^{eq}(l) \propto \langle \hat{\kappa}(l) \hat{\kappa}(l) \hat{\kappa}^*(l) \rangle. \quad (2.51)$$

Certains groupes ont déjà fait le passage de la FC2pts à la FC3pts et ont montré, en utilisant des modèles analytiques que l'on pouvait obtenir des contraintes plus fortes sur le modèle cosmologique (Bernardeau et al. 1997; Cooray and Hu 2001; Bernardeau et al. 2003; Takada and Jain 2003, 2004; Schneider and Lombardi 2003; Schneider et al. 2005; Benabed and Scoccimarro 2006). Certains auteurs ont également montré l'intérêt que pouvait avoir l'estimation d'autres configurations. Dans l'article de Babich and Zaldarriaga (2004), les auteurs ont montré qu'il existait deux configurations importantes :

- . la configuration équilatérale qui correspond à un triangle dont les trois côtés ont la même longueur.
- . la configuration locale, pour laquelle un côté du triangle est beaucoup plus petit que les deux autres (que l'on choisit habituellement de même longueur).

Dans une future étude nous considérerons également le bispectre dans sa configuration locale.

Une quantité plus simple que la FC3pts peut être obtenue en estimant le moment d'ordre trois de la convergence lissée (le coefficient d'asymétrie) (Bernardeau et al. 1997) ou le coefficient d'asymétrie dans une ouverture de masse M_{ap} (Jarvis et al. 2004; Kilbinger and Schneider 2005).

Une approche différente pour chercher la non-Gaussianité consiste à faire une analyse statistique directement sur les structures non-Gaussiennes telles que les amas de galaxies. Les amas de galaxies sont les plus grandes structures de l'Univers pratiquement virialisées, ils fournissent un moyen unique de se concentrer sur la non-Gaussianité présente à petite échelle. Une statistique intéressante est le *Peak Counting* (PC) qui cherche le nombre de pics dans le champ de convergence correspondant plus ou moins à l'abondance d'amas de galaxies dans le champ (see e.g. Hamana et al. 2004).

2.4.2 Calcul du spectre et du bispectre à partir de la FFT polaire

Dans cette partie, nous proposons une nouvelle méthode basée sur la transformation de Fourier polaire pour estimer le spectre de puissance et le bispectre de manière rapide et exacte.

Habituellement, pour estimer le spectre ou le bispectre, on calcule dans un premier temps la transformation de Fourier en utilisant la FFT puis on estime les corrélations dans l'espace de Fourier. L'isotropie de l'Univers fait que chaque mode doit être intégré sur tous les angles θ . Pour chaque fréquence, on définit donc un rayon dans l'espace de Fourier pour lequel on calcule la puissance moyenne. Cela demande de faire un certain nombre d'approximations durant la deuxième étape pour pouvoir interpoler l'intensité le long du rayon (voir Fig. 2.11 à gauche). La méthode que nous proposons consiste à utiliser une transformation de Fourier polaire qui nous permet d'éviter de faire des approximations pour interpoler la puissance le long du rayon.

La transformation de Fourier polaire

La transformation de Fourier polaire est un outil très pratique lorsque l'on souhaite manipuler la transformée de Fourier en coordonnées polaires. Les approximations qui sont faites habituellement pour interpoler sur une grille polaire les coefficients de Fourier définis sur une grille cartésienne introduisent des erreurs, la transformation de Fourier polaire permet d'éviter de faire ce genre d'approximation, tout le travail étant fait par la transformation.

Cette transformation de Fourier polaire est seulement un cas particulier d'un problème plus général qui consiste à estimer la transformée de Fourier sur une grille non-régulière (Keiner et al. 2006). Il existe des algorithmes rapides de calcul de transformée de Fourier sur des grilles non régulières. Une transformation de Fourier polaire rapide et précise a été proposée par Averbuch et al. (2005). Pour un signal 2D donné de taille N , la complexité de cet algorithme est de $O(N \log N)$, comme une FFT 2D cartésienne classique.

Pour estimer le spectre de puissance et le bispectre équilatéral, nous avons utilisé le logiciel NFFT (Non equi-spaced Fast Fourier Transform) qui est disponible à l'adresse suivante <http://www-user.tu-chemnitz.de/~potts/nfft> (Keiner et al. 2006). Sur la Fig. 2.10 à droite, on peut voir la grille que l'on a choisie et à gauche, la grille cartésienne qui est couramment utilisée par la FFT.

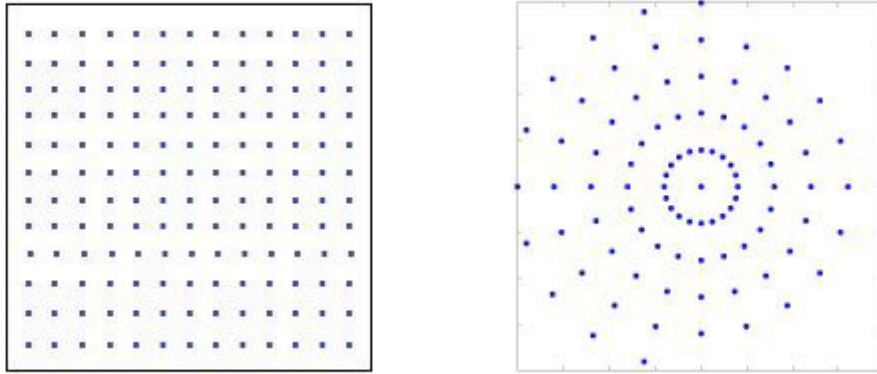


FIG. 2.10 – À gauche, grille régulière utilisée dans le calcul de la transformation de Fourier standard, à droite, grille polaire utilisée dans le calcul de la transformation de Fourier Polaire

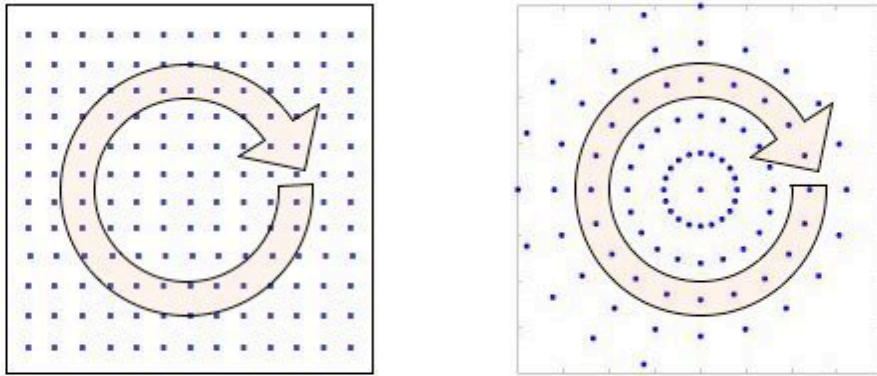


FIG. 2.11 – Calcul de la puissance moyenne par fréquence, à gauche, dans le cas d'une grille régulière et à droite, dans le cas d'une grille polaire.

Estimation du spectre de puissance : algorithme

L'algorithme pour estimer le spectre de puissance en utilisant la FFT polaire est le suivant :

1. On réalise une transformation de Fourier polaire directe de la convergence κ .
2. On prend le module au carré des coefficients de Fourier (en coordonnées polaires).
3. Le rayon r (en coordonnées polaires) est choisi égal à 0. On itère :
4. On fait la moyenne de la puissance obtenue pour tous les angles possibles dans le cercle de rayon r et d'origine $(0, 0)$.
5. $r = r + 1$ et si $r < r_{max}$, retourner à l'étape 4.

Pour calculer le spectre de puissance, nous faisons la moyenne du module au carré des coefficients de Fourier situés sur le cercle d'origine $(0, 0)$ et de rayon r . L'étape qui consiste à faire une moyenne de la puissance sur un rayon devient alors triviale et ne demande plus aucune approximation voir Fig. 2.11 à droite. Cet algorithme sera utilisé §4.3.1 et §4.3.2 pour l'estimation du spectre de puissance sur des données simulées.

Estimation du bispectre équilatéral : algorithme

Si on se limite à la configuration équilatérale du bispectre où $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}_3| = |\vec{k}|$, l'estimation du bispectre est assez semblable à celle du spectre de puissance.

L'algorithme pour estimer le bispectre équilatéral en utilisant la FFT polaire est le suivant :

1. On réalise une transformation de Fourier polaire directe de la convergence κ .
2. Le rayon r (en coordonnées polaires) est choisi égal à 0. On itère :
3. L'angle θ (en coordonnées polaires) est choisi égal à 0. On itère :
 4. On repère le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon r et d'origine $(0,0)$ dont un des sommets a pour coordonnées (r, θ) .
 5. On fait le produit des coefficients de Fourier situés aux 3 sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon r et d'origine $(0,0)$.
 6. $\theta = \theta + \delta\theta$ et si $\theta < 2\pi/3$ retourner à l'étape 4.
7. On calcule la moyenne du produit obtenu pour tous les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle de rayon r et d'origine $(0,0)$.
8. $r = r + 1$ et si $r < r_{max}$, retourner à l'étape 3.

Pour estimer le bispectre, nous devons calculer une puissance moyenne à partir des triangles équilatéraux de rayon $r = |\vec{k}|$. La Fig. 2.12 montre la forme que ces triangles doivent avoir dans l'espace de Fourier. Pour chaque r , nous intégrons tous les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle d'origine $(0,0)$ et de rayon r . En considérant que les cartes de convergence possèdent une symétrie de rotation, il suffit de scanner les angles de 0 à $2\pi/3$. Le bispectre équilatéral est ainsi obtenu en multipliant les coefficients de Fourier situés aux sommets du triangle. Ces coefficients de Fourier sont directement obtenus en utilisant une grille polaire. Nous n'avons pas besoin de faire des interpolations pour obtenir la valeur de ces coefficients comme il faudrait le faire si nous étions dans une grille cartésienne.

En plus d'être précis, ce calcul est très rapide. En effet, sur le champ simulé qui couvre une région de $1.975^\circ \times 1.975^\circ$ avec 512×512 pixels en utilisant un PC-linux avec un processeur à 2.5 GHz, environ 60 secondes sont nécessaires pour calculer le bispectre équilatéral avec une complexité de $O(N \log N)$. Le plus long étant le calcul de la FFT polaire. Cet algorithme sera utilisé dans le paragraphe §4.3.2 pour l'estimation du bispectre sur des données simulées.

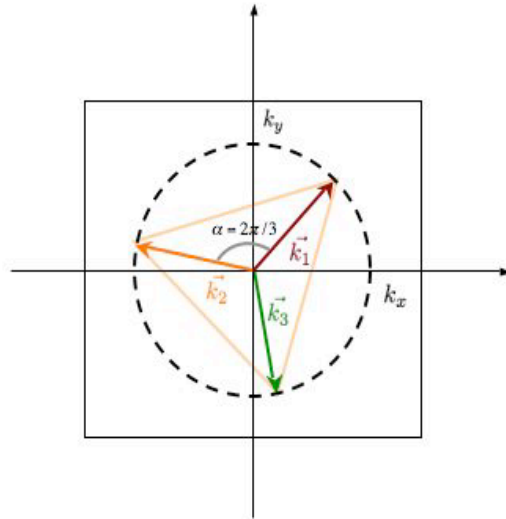


FIG. 2.12 – Représentation de la configuration équilatérale du bispectre dans l'espace de Fourier. Les triangles équilatéraux doivent être inscrits dans un cercle d'origine $(0,0)$ et de rayon k .

2.4.3 Estimation de statistiques en présence de données manquantes

En pratique, la géométrie complexe du relevé fait que les cartes de cisaillement γ_i et la carte de convergence κ sont incomplètes. L'estimation des statistiques dans ces conditions devient plus délicate. Dans ce paragraphe, nous allons expliquer d'où viennent les données manquantes et nous allons voir les solutions qui ont été proposées dans la littérature.

Introduction au problème des données manquantes

La perte de données peut être causée par de nombreux facteurs. Généralement ce sont des défauts sur la caméra CCD qui sont à l'origine des données manquantes. En cisaillement gravitationnel, les données manquantes sont dues essentiellement aux étoiles les plus brillantes dans le champ de vue qui saturent l'image autour d'elles comme on peut le voir dans plusieurs relevés ([Hoekstra et al. 2006](#); [Hamana et al. 2003](#); [Massey et al. 2005](#); [Bergé et al. 2008](#)). Ce qui nous oblige à les masquer ([Mellier and van Waerbeke 2002](#)).

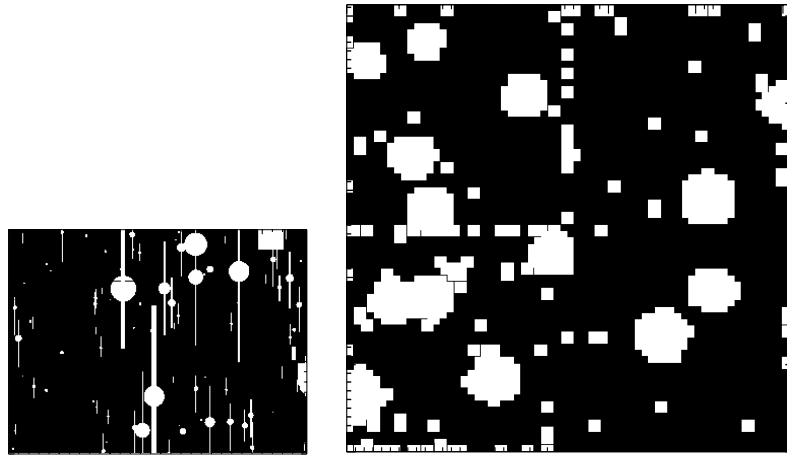


FIG. 2.13 – À gauche, le masque appliqué aux données Subaru $0.575^\circ \times 0.426^\circ$ (avec la caméra SuprimeCam) à droite, le masque appliqué aux données CFHTLS sur le champ D1 $1^\circ \times 1^\circ$ (avec la caméra MegaCam)

Sur la Fig. 2.13 à droite, on peut voir le masque appliqué aux données CFHTLS sur le champ D1 avec environ 20 % de données manquantes ([Bergé et al. 2008](#)) et à gauche celui appliqué aux données Subaru qui couvre le même champ où environ 10 % des données manquent. Le masque dépend essentiellement du champ de vue. Cependant, nous pouvons voir que les trous sur les données CFHTLS sont plus larges que ceux sur les données Subaru. La taille des trous sur les données de cisaillement gravitationnel dépend essentiellement de la qualité du télescope. Le télescope Subaru est un télescope de 8.2 mètres (permettant d'avoir un *seeing*¹ de 0.5 arcsec) alors que le CFHT est un télescope de 3.6 mètres (permettant d'avoir un *seeing* de 0.7 arcsec) tous les deux au sommet de Mauna Kea. La PSF du télescope CFHT que l'on dérive des étoiles sur le champ est ainsi plus large que celle du télescope Subaru. En plus, dans les images du CFHTLS, des effets de *ghost* sont présents notamment autour des étoiles les plus brillantes comme on peut le voir dans Fig. 2.14. Ils sont dus à la réflexion sur les miroirs secondaires (pour plus de détails voir [Kent et al. 2006](#)). Ceux-ci obligent à enlever toute une zone du ciel autour de l'étoile.

Le but de toute analyse en cisaillement gravitationnel est de contraindre in fine le modèle

¹Le seeing est l'un des paramètres utilisés pour désigner la qualité optique du ciel. C'est une mesure de la fonction d'étalement des images liée à la turbulence atmosphérique.

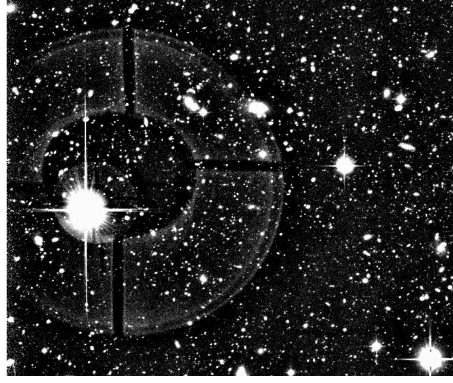


FIG. 2.14 – Effet de *ghost* sur les données CHFTLS autour des étoiles les plus brillantes nécessitant d'être masqué

cosmologique. Pour cela, on estime des statistiques qui permettent ensuite de poser des contraintes sur les paramètres cosmologiques.

Pour les relevés à géométrie complexe, l'estimation de toutes ces statistiques se complique. On a besoin de statistiques qui peuvent être estimées rapidement mais qui ne sont pas biaisées par la présence de données manquantes. De nombreux groupes se sont intéressés au problème d'estimation de statistiques en présence de données manquantes essentiellement sur les cartes de cisaillement. Dans le paragraphe qui suit, on décrit brièvement chacune des grandes classes de méthodes qui ont été développées.

Estimation des statistiques d'ordre 2

Dans l'analyse de données de cisaillement, la présence de données manquantes est inévitable et un traitement approprié est nécessaire pour tenir compte de la géométrie complexe des données. Pour l'estimation de la FC2pts aucun traitement particulier n'est nécessaire, il suffit de ne pas considérer les paires qui sont dans les régions masquées. Cependant, le temps nécessaire à l'estimation de la FC2pts ne permet pas de l'utiliser pour des grands relevés du ciel. Contrairement à la FC2pts, l'estimation du spectre de puissance est fortement sensible à la présence de données manquantes. Les données manquantes génèrent une perte de puissance dans le spectre et les discontinuités introduites par le masque dans les données produisent des distorsions dans le spectre de puissance qui dépendent de la forme du masque. Pour comprendre ce phénomène, il suffit d'essayer de représenter les bords d'un trou à l'aide de sinusoides. On s'aperçoit vite qu'un certain nombre de sinusoides à des fréquences variées sont nécessaires pour représenter ce type de discontinuité. On ajoute donc de la puissance au spectre de puissance à chacune de ces fréquences. Pour l'estimation du spectre de puissance, il est donc indispensable de tenir compte du masque.

Dans la littérature, on trouve un grand nombre d'études ayant abordé le problème de l'estimation du spectre de puissance à partir de données complètes ou incomplètes. Plusieurs solutions ont été proposées qui peuvent se classer comme suit :

Les estimateurs du Maximum de Vraisemblance (MV) :

On trouve deux catégories d'estimateurs MV. Le premier utilise un algorithme itératif de type Newton pour maximiser la dérivée de la fonction de vraisemblance sans faire aucune hypothèse sur la forme de la matrice de covariance des données observées (Bond et al. 1998; Ruhl et al. 2003). Le deuxième est basé sur une modélisation du spectre de puissance (voir par exemple Tegmark 1997).

Ces estimateurs sont optimaux au sens du Maximum de Vraisemblance et permettent de dériver les bornes de Cramer-Rao pour l'estimation du spectre de puissance. D'une façon générale, les bornes de Cramer-Rao permettent de fixer une limite inférieure sur la variance de l'erreur qu'il est possible d'atteindre dans l'estimation d'un paramètre ici le spectre de puissance.

Cependant, les estimateurs MV peuvent devenir rapidement prohibitifs en temps de calcul pour des données grand champ. De plus, pour corriger des données masquées, ces estimateurs supposent une étape de déconvolution (analogue à la méthode PSP ci-dessous) qui nécessite l'inversion de la matrice de Fisher (estimée). Cette matrice dépend du masque et peut être singulière comme dans le cas des masques galactiques pour les cartes de CMB. Une régularisation est alors nécessaire.

Les estimateurs du Pseudo-Spectre de Puissance (PSP) :

La méthode la plus connue est celle proposée par [Hivon et al. \(2002\)](#) appelée MASTER qui permet d'estimer le spectre de puissance sur une grille cartésienne ou sphérique. Cet algorithme a été développé pour gérer les données manquantes telles que le masque galactique dans les données de CMB en utilisant des fenêtres d'apodisation, (voir aussi [Hansen et al. 2002](#)). Ces estimateurs peuvent être estimés efficacement en utilisant des transformations rapides telles que la transformation en harmoniques sphériques pour des données en coordonnées sphériques ou la transformation de Fourier pour des données en coordonnées cartésiennes. En plus, de leur implémentation rapide, les méthodes PSP permettent de dériver analytiquement la matrice de covariance du spectre de puissance avec quelques hypothèses simplificatrices (e.g. matrice du bruit symétrique, faisceaux symétrique, etc...). Cependant, l'étape de déconvolution dans la méthode MASTER nécessite d'inverser la matrice de couplage qui dépend du spectre de puissance du masque (c'est-à-dire de la fenêtre d'apodisation). La singularité de cette matrice dépend fortement de la taille et de la forme du masque. Ainsi, dépendant de la géométrie du masque, l'étape de déconvolution peut devenir instable. Pour surmonter ce problème, ces méthodes ont recouru à des inverses régularisés. C'est par exemple le cas dans [Hivon et al. \(2002\)](#) où il est proposé d'intégrer chaque point du spectre de puissance sur un intervalle donné. En faisant cela, les auteurs supposent ainsi que le spectre de puissance est lisse par morceaux, ce qui mène à une perte de résolution.

Dans la classe des estimateurs PSP, on trouve une sous-classe d'estimateurs sous-optimale qui estime dans un premier temps la fonction de corrélation à deux points de manière rapide et dérive ensuite une estimation du spectre de puissance. [Szapudi et al. \(2001b,a, 2005\)](#) ont proposé une méthode basée sur ce principe appelée SPICE. Ce type d'estimateurs ([Szapudi et al. 2001b, 2005](#)) n'est pas exactement équivalent aux estimateurs PSP et soulève deux problèmes.

Le premier problème est statistique :

SPICE utilise le théorème de Wiener-Khinchine pour dériver la fonction de corrélation à deux points dans l'espace direct en divisant la transformée de Fourier inverse du spectre de puissance des données masquées par la transformée de Fourier inverse du spectre de puissance du masque. Mais quand les données sont masquées ou apodisées, on perd la condition de stationnarité et le théorème de Wiener-Khinchine n'est plus strictement valide.

La deuxième problème est méthodologique :

Pour corriger la fonction de corrélation à deux points de la présence de données manquantes, contrairement à ce qui est fait par la méthode MASTER qui inverse la matrice de couplage dans l'espace des harmoniques sphériques (ou de Fourier), [Szapudi et al. \(2005\)](#) propose d'inverser la matrice de couplage dans l'espace direct. Pour cela, les auteurs divisent la fonction d'auto-corrélation estimée à partir des données brutes par celle du masque. Mais cette inversion (déconvolution) est clairement un problème inverse mal posé et la division directe est généralement instable. Seule une régularisation spécifique à chaque application peut per-

mettre d'éviter ce problème.

La méthode MASTER a été conçue initialement pour le traitement de données sur la sphère. A ce jour, aucune version de ce code n'est disponible pour le traitement de données en coordonnées cartésiennes. Il existe une version euclidienne de SPICE appelée eSPICE qui a été proposée pour le calcul du spectre de puissance d'une distribution de points (par exemple des galaxies). Mais, celle-ci n'a pas été testée sur des cartes où chaque pixel possède une valeur (c'est-à-dire un poids). Un code publique pour le traitement de données pondérées en coordonnées cartésiennes reste encore à développer.

Autres estimateurs :

Une méthode hybride a également été proposée qui combine un estimateur MV aux basses fréquences et un estimateur PSP aux hautes fréquences (Efstathiou 2004).

Les lecteurs intéressés peuvent se référer à la revue proposée par Efstathiou (2004) qui donne plus de détails sur ces estimateurs et fait une étude comparative.

Estimation des statistiques d'ordre 3

Les estimateurs que l'on décrit plus haut reposent sur l'hypothèse que le champ est Gaussien. En effet, les statistiques d'ordre deux sont suffisantes pour caractériser complètement un champ Gaussien. Par contre, pour des champs fortement non-Gaussien, la stratégie doit être différente et des statistiques d'un ordre supérieur doivent être estimées.

Plusieurs auteurs ont déjà abordé l'estimation des statistiques à trois points. Dans Kilbinger and Schneider (2005), l'auteur calcule, à partir de simulations numériques réalistes, le moment d'ordre trois du champ de cisaillement pour des "ouvertures de masse" différentes correspondant plus ou moins à des échelles spatiales. Beaucoup d'auteurs ont déjà dérivé des prédictions analytiques pour la fonction de corrélation à trois points et le bispectre (voir par exemple Ma and Fry 2000a,b; Scoccimarro and Couchman 2001; Cooray and Hu 2001). L'estimation de la fonction de corrélation à trois points à partir de données a déjà été réalisée par Bernardeau et al. (2002) mais elle peut difficilement être envisagée pour le traitement des futures données grand champ à cause de son temps de calcul. Dans la conclusion de Szapudi et al. (2001b), les auteurs suggèrent une fonction de corrélation à p points avec une complexité de $O(N(\log N)^{p-1})$, mais il n'est pas clair si cette suggestion est valide en présence de données manquantes. Scoccimarro et al. (1998) proposent un algorithme pour calculer le bispectre à partir de simulations numériques en utilisant une FFT mais sans considérer le cas des données manquantes. Cette méthode est utilisée par Fosalba et al. (2005) pour estimer le bispectre à partir de simulations numériques afin de le comparer aux prédictions analytiques faites à partir du modèle de halo. Des études récentes sur les données de CMB (Komatsu et al. 2005; Yadav et al. 2007) se sont concentrées sur la recherche de non-Gaussianité sous forme quadratique (f_{NL}) en utilisant une analyse bispectrale (Szapudi et al. 2001b, 2005).

Comme dans le cas des statistiques à deux points, la fonction de corrélation à trois points n'est pas biaisée par la présence de données manquantes, alors que l'estimation du bispectre l'est fortement. Actuellement aucune solution n'a été proposée pour reconstruire le bispectre en présence de données manquantes et le temps nécessaire à l'estimation de la FC3pts ne permet pas de l'utiliser pour des grands relevés du ciel.

L'estimation de statistique en présence de données manquantes est un problème majeur en statistique qui reste ouvert à ce jour. De nombreuses solutions ont été proposées mais aucune n'apporte une solution globale et optimale. Au chapitre IV, nous proposons une méthode innovante qui permet d'interpoler les données manquantes et d'estimer ensuite toute sorte de

statistiques.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différentes étapes de la chaîne de traitement qui est utilisée pour poser des contraintes sur le modèle cosmologique à partir des effets de lentille gravitationnelle faibles.

Nous avons présenté également certains de nos travaux :

1. Tout d'abord, nous avons présenté une étude que nous avons menée pour comparer les effets de cisaillement aux effets de flexion (déformation d'un ordre supérieur). Nous avons montré ainsi que la flexion, sujette à des erreurs de mesure importantes, ne permet pas de reconstruire la carte de convergence avec plus de précision que ne le permet le cisaillement.
2. Nous avons proposé ensuite une nouvelle méthode pour estimer le spectre de puissance et le bispectre de manière rapide et exacte en utilisant une transformation de Fourier polaire rapide. Les codes sont disponibles à l'adresse suivante :
[http ://irfu.cea/Ast/fastlens.software.html](http://irfu.cea/Ast/fastlens.software.html)

CHAPITRE 3

Introduction aux ondelettes et à l'analyse multi-échelles

Sommaire

3.1 La merveilleuse histoire des ondelettes	62
3.1.1 La transformation de Fourier	62
3.1.2 La transformation de Gabor ou transformation de Fourier glissante	62
3.1.3 Un peu d'histoire contemporaine	63
3.2 Les ondelettes et la parcimonie	65
3.2.1 A la recherche d'une représentation <i>parcimonieuse</i>	65
3.2.2 Le filtrage par les ondelettes	66
3.3 Le cadre mathématique et numérique des ondelettes	67
3.3.1 Le cadre mathématique	67
3.3.2 La transformation en ondelettes numérique	69
3.4 Les transformations bidimensionnelles	70
3.4.1 La transformation en ondelettes bi-orthogonale	70
3.4.2 La transformation en ondelettes isotrope non-décimée	72
3.4.3 La transformation en <i>ridgelets</i>	75
3.4.4 La transformation en <i>curvelets</i>	76
3.5 Conclusion	76

Pour analyser une image et plus globalement un signal, il existe un certain nombre de transformations qui permettent de transformer ce signal sous une forme qui permet de mieux l'analyser. La transformation la plus populaire, introduite au début du XIX^{ème} siècle, est la transformation de Fourier qui fournit une représentation fréquentielle du signal. Depuis une dizaine d'années, cette représentation a été lentement complétée par de nouvelles représentations qui n'ont cessé de se développer : les représentations multi-échelles. Ces représentations ont déjà connu un grand nombre de succès dans de nombreux domaines notamment en astrophysique.

Dans cette thèse, nous proposons d'appliquer ces nouvelles méthodes aux données de cisaillement gravitationnel. Pour cela, nous développons de nouveaux outils de traitement et d'analyse basés sur ces méthodes multi-échelles afin d'améliorer l'analyse de ces données.

Dans ce chapitre, nous faisons une brève introduction aux méthodes d'analyse multi-échelles en décrivant plus précisément les outils que nous utilisons tout au long de cette thèse. Dans une première partie, nous montrons l'évolution des idées qui a permis de passer de l'analyse de Fourier à l'analyse multi-échelles. Dans une deuxième partie, nous introduisons la notion très importante de parcimonie. Les bases théoriques et numériques des ondelettes

sont rappelées dans la partie suivante. Enfin, dans la dernière partie, nous nous intéressons au cas 2D et nous introduisons deux nouvelles représentations.

3.1 La merveilleuse histoire des ondelettes

Depuis longtemps, on cherche des représentations pour mieux analyser le signal. C'est tout d'abord la transformation de Fourier qui est introduite au début du XIXème siècle. Celle-ci décompose le signal sur une base de sinusoides. Au cours du XXème siècle on cherche comment décomposer un signal sur des fonctions autres que des fonctions sinusoides et ainsi obtenir une représentation du signal où l'information de fréquence et de temps seraient combinées, c'est cette idée qui mènera au concept d'ondelettes...

3.1.1 La transformation de Fourier

La transformation de Fourier introduite en 1807 par le français Jean-Baptiste Joseph Fourier stipule que toute fonction périodique $f(x)$ peut s'exprimer comme une somme infinie de sinus et cosinus de fréquences k et d'amplitudes variables. Elle est définie comme suit :

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos(2\pi k x) - i \sin(2\pi k x)) dx, \quad (3.1)$$

où les fonctions analysantes sont :

$$\psi_k(x) = e^{-2i\pi k x}. \quad (3.2)$$

Cet outil mathématique vieux de deux siècles est utile dans beaucoup d'applications. Il a notamment été utilisé dans le développement de la téléphonie, de l'informatique et dans le domaine audiovisuel. Mais le principal défaut de la transformation de Fourier est qu'elle ne permet pas de suivre l'évolution du signal en fonction du temps. En visualisant la transformée de Fourier d'un signal, on peut penser que celui-ci est stationnaire. L'information sur le temps n'est pas perdue, mais elle est ensevelie sous les phases : les mêmes sinus et cosinus peuvent représenter des moments très différents du signal parce qu'ils sont décalés en phase.

3.1.2 La transformation de Gabor ou transformation de Fourier glissante

Un prototype d'analyse en ondelettes a été proposé au milieu des années 1940 par le physicien D. Gabor qui suggère de rendre locale l'analyse de Fourier, en s'aidant de fenêtres. En multipliant la fonction étudiée par une fenêtre, on en obtient une version "locale", dont on peut déterminer le contenu fréquentiel par analyse de Fourier classique. On renouvelle alors l'opération en déplaçant la fenêtre d'analyse. L'ensemble de ces transformations de Fourier ainsi localisées forment la transformation de Gabor du signal, et fournissent donc une analyse fréquentielle locale. La transformation de Gabor est définie comme suit :

$$G_f(k, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(x - b) e^{-2i\pi k x} dx, \quad (3.3)$$

où b est le paramètre de position de la fenêtre h .

Dans la transformation de Gabor, la fenêtre h est une Gaussienne d'échelle $\sigma = 1$ et centré sur b , ainsi $h(x - b) = e^{-\pi(x-b)^2}$. Les fonctions analysantes ou fonctions de Gabor sont alors définies par :

$$\psi_{b,k}(x) = e^{-\pi(x-b)^2} e^{2i\pi kx}. \quad (3.4)$$

Sur la Fig. 3.1, on peut voir un exemple d'une telle fonction. L'analyse en ondelettes, que

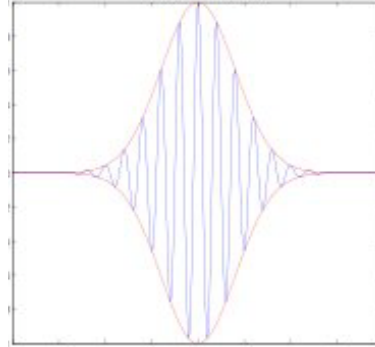


FIG. 3.1 – Fonction de Gabor.

nous détaillons un peu plus bas, est basée sur un concept quelque peu différent du concept de fréquence : le concept d'*échelle*. Au lieu de considérer des fonctions oscillantes placées à l'intérieur d'une fenêtre, que l'on fait ensuite coulisser le long d'un signal à analyser, les ondelettes sont davantage des copies les unes des autres, copies presque conformes puisqu'elles sont de forme constante et ne diffèrent que par leur taille. L'ensemble des fonctions d'ondelettes analysantes est construit par dilatation, compression et translation de l'ondelette de base, appelée ondelette mère.

La différence fondamentale entre ces deux transformations tient précisément à cette opération de dilatation : les ondelettes contrairement aux fonctions de Gabor, s'adaptent d'elles mêmes à la taille des structures qu'elles recherchent. Elles sont très étendues pour étudier les basses fréquences (les grandes échelles), et très fines pour étudier des phénomènes plus transitoires (les petites échelles).

3.1.3 Un peu d'histoire contemporaine

En 1909, le mathématicien hongrois Alfred Haar découvre une base de fonctions dont les éléments sont aujourd'hui considérés comme les premières fonctions de type ondelettes ([Haar 1909](#)). Cette fonction consistant en une courte impulsion positive suivie d'une courte impulsion négative (Fig. 3.3 en bas, à gauche) est aujourd'hui connue sous le nom de "ondelettes de Haar". Mais, l'analyse multi-échelles n'avait pas encore vu le jour...

C'est en 1981 que Jean Morlet un ingénieur d'Elf-Aquitaine (Fig. 3.2 en haut, à gauche) développe sa propre méthode pour l'analyse des données sismiques par des composantes localisées dans le temps qu'il appellera "ondelettes à forme constante". Plus tard, elles seront connues sous le nom de "ondelettes de Morlet" (voir Fig. 3.3 en haut, à gauche). La méthode de Morlet semble marcher, mais celui-ci n'est pas satisfait par ses preuves empiriques et cherche à en démontrer l'exactitude. Le mathématicien Alex Grossman va l'aider à démontrer que le signal original peut être reconstruit à partir de sa décomposition en ondelettes. Le premier papier utilisant le mot *ondelette* est publié en 1984 ([Morlet and Grossman 1984](#)).

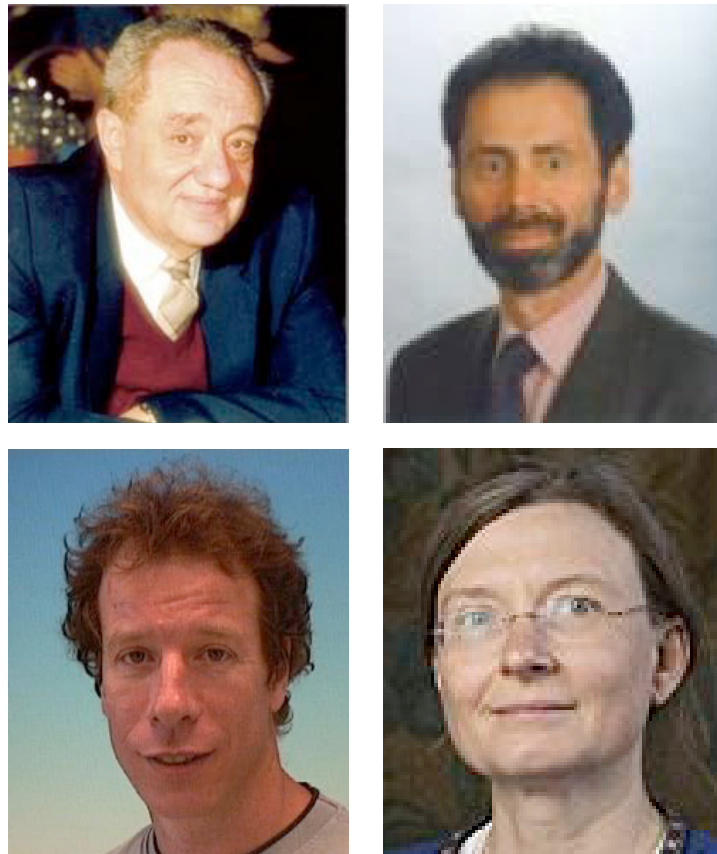


FIG. 3.2 – En haut, à gauche, Jean Morlet. En haut, à droite, Yves Meyer. En bas, à gauche, Stéphane Mallat. En bas, à droite, Ingrid Daubechies.

En 1985, Yves [Meyer](#) (Fig. 3.2 en haut, à droite) découvre un nouveau type d'ondelettes (voir Fig. 3.3 en haut, à droite) qui possède la propriété d'être orthogonale. Ceci rend la transformation en ondelettes aussi simple à manipuler que la transformation de Fourier.

En 1986, Stéphane [Mallat](#) (Fig. 3.2 en bas, à gauche) ancien élève de Meyer fait le lien entre la théorie des ondelettes et la littérature sur les codages en sous-bandes et les algorithmes pyramidaux existants dans le domaine du traitement d'images. Les algorithmes pyramidaux ont été découverts par [Burt and Anderson](#) en 1983 dans le cadre du traitement d'images. Ce sont des algorithmes rapides fournissant des vues de plus en plus lissées d'une image. L'idée d'analyse multi-échelles qui consiste à regarder un signal à différentes échelles de résolution était donc déjà connue des experts en traitement d'images. Le codage en sous-bandes a été inventé en 1977, au centre d'IBM, par [Esteban and Galand](#), la motivation étant le téléphone digital. Mallat est le premier à comprendre que les bases orthonormées d'ondelettes et le codage en sous-bandes peuvent, dans la plupart des cas, être identifiés. Et on doit le succès de la transformation en ondelettes à une méthode de discrétisation qu'il introduit en 1986 alors qu'il est encore étudiant en thèse. Mallat en collaboration avec Meyer montrent alors que les ondelettes sont implicites dans l'analyse multi-échelles. Cette idée d'analyse multi-échelles est un grand pas dans la recherche sur les ondelettes.

La dernière avancée est apportée par I. [Daubechies](#) (Fig. 3.2 en bas, à droite) qui découvre en 1987 une nouvelle classe d'ondelettes : les ondelettes à support compact (voir Fig. 3.3 en bas, à droite). On dispose dès lors d'ondelettes orthogonales (comme celle de Meyer) à support compact qui peuvent être implémentées en utilisant les idées simples des filtres digitaux. En combinant les idées de Daubechies et de Mallat, on obtient ainsi une transformation

orthogonale simple qui peut être calculée très rapidement sur ordinateur.

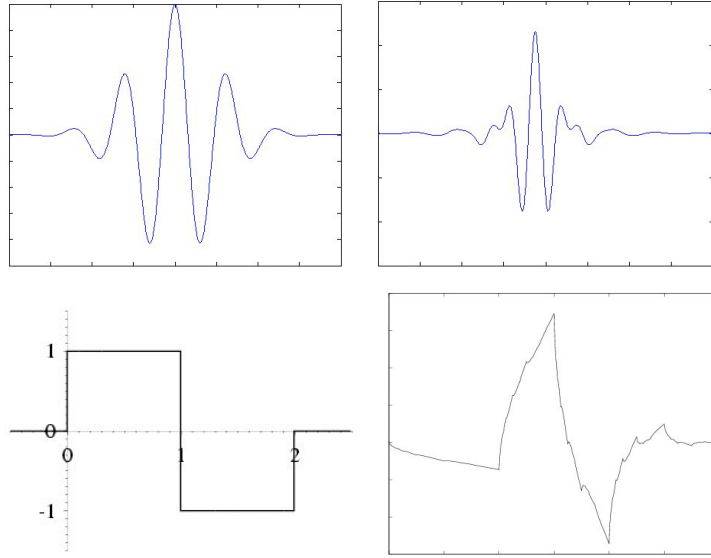


FIG. 3.3 – En haut, à gauche, Ondelette de Morlet. En haut, à droite, Ondelette de Meyer. En bas, à gauche, Ondelette de Haar. En bas, à droite, Ondelette de Daubeschies.

Les applications des ondelettes aujourd’hui sont vastes. On les utilise en imagerie médicale, dans les films d’animation, pour la télévision haute définition, dans le stockage numérique des empreintes digitales par le FBI, dans l’analyse des grandes structures de l’Univers, dans la fameuse norme jpeg2000 pour compresser les images, etc... Ces nombreuses applications sont dues au fait que la transformation en ondelettes permet de faciliter l’analyse, la transmission, la compression de l’information, et son extraction du ”bruit” environnant. Le succès des ondelettes est relié au concept de parcimonie que nous présentons dans la partie suivante.

3.2 Les ondelettes et la parcimonie

Nous allons maintenant introduire une notion très importante la *parcimonie* qui est la clef d’une bonne représentation pour le signal.

3.2.1 A la recherche d’une représentation parcimonieuse

En analyse de données, on recherche fréquemment une bonne représentation des données afin d’améliorer la qualité du traitement. La transformation la plus populaire est la transformation de Fourier qui transforme un signal en l’ensemble des fréquences présentes dans le signal. Une transformation qui a connu depuis quelques années un remarquable développement, tant du point de vue théorique que du point de vue des applications est la transformation en ondelettes.

Toutes les représentations ne se valent pas et on préfère généralement les représentations *parcimonieuses* qui permettent de représenter le signal avec un nombre relativement limité de coefficients. Autrement dit, seule une petite partie des coefficients est significatif, les autres étant presque nuls.

Soit un signal S et une représentation Φ . Le signal S possède une décomposition unique sur la représentation Φ :

$$S = \sum_k \alpha_k \Phi_k. \quad (3.5)$$

On dit que le signal S est parcimonieux dans la représentation Φ si la plupart des coefficients α sont nuls ou proches de zéro. Par exemple, la meilleure représentation pour une sinusoïde est la transformation de Fourier qui représente la sinusoïde à l'aide d'un seul coefficient non nul. Globalement, la transformation de Fourier est bien adaptée pour représenter les signaux périodiques. Mais pour ce qui est des signaux non-périodiques que l'on peut rencontrer couramment, la transformation en ondelettes est généralement plus efficace à les représenter, c'est-à-dire que toute l'information est contenue dans un nombre limité de coefficients. Plus généralement, pour savoir si un signal est parcimonieux dans une représentation donnée, on trace une courbe représentant la valeur absolue des coefficients classés par ordre décroissant (voir Fig. 3.4). Si la représentation est parcimonieuse, on doit obtenir une distribution très piquée c'est-à-dire un faible nombre de coefficients significatifs et un grand nombre de petits coefficients.

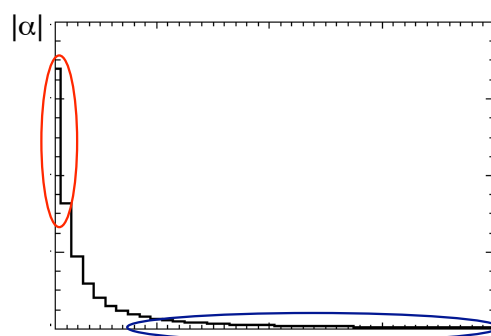


FIG. 3.4 – Test de parcimonie : décroissance (de la valeur absolue) des coefficients classés par ordre décroissant. Un signal est parcimonieux dans une représentation donnée, si le nombre de grands coefficients est faible (en rouge) et si les autres coefficients sont nuls ou presque nuls (en bleu).

En plus des applications à la compression de données, une telle capacité à "concentrer" l'information est souvent un avantage décisif pour de nombreuses applications.

3.2.2 Le filtrage par les ondelettes

Pour illustrer davantage les perspectives ouvertes par la *parcimonie*, prenons l'exemple du filtrage de signaux bruités qui est extrêmement intéressant. Le débruitage est un problème rencontré quotidiennement par nombre d'ingénieurs ou de scientifiques. En effet, quand on mesure une quantité physique, la mesure n'est jamais exacte. Le résultat obtenu est entaché d'une erreur, qui provient en général de facteurs multiples comme l'imprécision de l'appareil, les vibrations du milieu... Le signal obtenu est alors souvent la somme du vrai signal et d'un bruit de mesure, et le problème qui se pose est souvent de se débarrasser du bruit pour accéder au signal original. Il s'agit d'un problème très classique, qui a déjà reçu nombre de réponses souvent satisfaisantes. Il est cependant intéressant de décrire la solution très simple qui est donnée par l'analyse en ondelettes. Très souvent, le signal original est représenté parcimonieusement (au sens donné plus haut) par ses coefficients d'ondelettes, contrairement au bruit. Ainsi, l'information intéressante est concentrée dans un nombre limité de coefficients, alors que la contribution du bruit ne l'est pas. En utilisant la propriété de conservation de l'énergie, propre aux transformations orthonormées telle que la transformation en ondelettes, les coefficients en ondelettes provenant du bruit sont donc significativement plus faibles que ceux du signal original. Pour débruiter, il suffit de calculer la transformée en ondelettes du

signal bruité, de remplacer par zéro les coefficients qui sont trop faibles (c'est à dire plus petits qu'un certain seuil) et de reconstruire. On court bien sûr le risque de remplacer par zéro aussi quelques coefficients provenant du signal original, mais ces coefficients étant petits, l'erreur ainsi commise est généralement peu importante, et facile à contrôler.

3.3 Le cadre mathématique et numérique des ondelettes

La transformation en ondelettes remplace la sinusoïde de la transformation de Fourier ou la sinusoïde fenêtrée de la transformation de Gabor par une famille de translations et dilatations d'une même fonction, l'ondelette. Les paramètres de translation et de dilatation sont les deux arguments de la transformation en ondelettes.

3.3.1 Le cadre mathématique

La transformation en ondelettes continue

La transformation en ondelettes W continue d'un signal 1D f est définie par :

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) dx, \quad (3.6)$$

où $a (> 0)$ est le paramètre d'échelle et b est le paramètre de position. $W_f(a, b)$ sont les coefficients en ondelettes de la fonction $f(x)$.

Les fonctions analysantes ou ondelettes sont définies par :

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right). \quad (3.7)$$

La famille de fonctions ondelettes est donc obtenue par translation et dilatation de l'ondelette mère ψ . La transformation en ondelettes continue est donnée par les produits de convolution entre $f(x)$ et chacun des membres de la famille de fonctions ondelettes. On obtient ainsi des coefficients en ondelettes qui sont fonction de l'échelle et de la position. Nous avons déjà présenté quelques familles d'ondelettes ψ (voir Fig. 3.3) mais il en existe beaucoup d'autres et autant de transformations en ondelettes différentes.

La transformation en ondelettes inverse est obtenue par :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} W(a, b) \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \frac{da db}{a^2}, \quad (3.8)$$

avec :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(2\pi k)|^2}{2\pi k} dk = \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(2\pi k)|^2}{2\pi k} dk. \quad (3.9)$$

La reconstruction est possible uniquement si l'ondelette ψ vérifie la condition d'admissibilité que nous décrivons dans le paragraphe qui suit.

Les propriétés de la fonction ondelette

Les deux propriétés les plus importantes pour une ondelette sont la condition d'admissibilité et la condition de régularité. Ce sont aussi ces deux propriétés qui donnent aux ondelettes leur nom.

Condition d'admissibilité :

Une fonction $\psi(x)$ intégrable qui vérifie la condition d'admissibilité suivante :

$$\int \frac{|\hat{\psi}(2\pi k)|^2}{|2\pi k|} dk < +\infty, \quad (3.10)$$

peut être utilisée pour l'analyse et ensuite la reconstruction (ou synthèse) d'un signal sans perte d'information (Sheng 1996). Où $\hat{\psi}$ représente la transformée de Fourier de ψ .

La condition d'admissibilité implique donc que la transformée de Fourier de $\psi(x)$ soit nulle pour la fréquence nulle c'est-à-dire :

$$|\hat{\psi}(2\pi k)|_{k=0}^2 = 0. \quad (3.11)$$

Cette condition implique que la fonction $\psi(x)$ qu'on appelle *ondelette* soit un filtre passe-bande. De plus, une valeur zéro pour la fréquence nulle signifie aussi que cette fonction ondelette doit-être à moyenne nulle :

$$\int \psi(x) dx = 0, \quad (3.12)$$

et par conséquent la fonction $\psi(x)$ doit osciller et s'amortir, d'où le nom de *ondelette*.

Condition de régularité :

On impose aussi d'autres conditions sur la fonction ondelette afin qu'elle ait une décroissance rapide. C'est la condition de régularité qui assure que la fonction ondelette est suffisamment lisse et concentrée à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel. Le concept de régularité n'est pas très simple nous allons essayer de l'expliquer à l'aide des moments nuls. Si nous faisons un développement de Taylor de la transformée en ondelettes autour de $b = 0$:

$$W_f(a, b = 0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\sum_{p=0}^n f^{(p)}(0) \int \frac{x^p}{p!} \psi\left(\frac{x}{a}\right) dx + O(x^n) \right], \quad (3.13)$$

où $f^{(p)}$ est la p^{ieme} dérivée de f .

Définissons maintenant, les moments de l'ondelette ψ :

$$M_p = \int x^p \psi(x) dx. \quad (3.14)$$

Nous pouvons alors réécrire 3.13 :

$$W_f(a, b = 0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[f(0)M_0a + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}M_1a^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}M_na^{n+1} + O(a^{n+1}) \right]. \quad (3.15)$$

Grâce à la condition d'admissibilité, on sait déjà que le moment d'ordre 0 est nul (Le premier terme du membre de droite de l'équation 3.15 est égal à zéro). Si maintenant on arrive à faire que tous les moments jusqu'à l'ordre n soient nuls, les coefficients de la transformée en ondelettes vont décroître en a^{n+2} , pour une fonction $f(x)$ lisse. Si une ondelette a n moments nuls, l'ordre d'approximation de la transformée en ondelettes est aussi de n . En pratique, les moments ne doivent pas être obligatoirement nuls, une petite valeur suffit souvent. Le nombre de moments nuls nous donne la décroissance de l'ondelette et ceci est la clef d'une représentation efficace. Ce nombre dépend fortement de l'application.

3.3.2 La transformation en ondelettes numérique

Les algorithmes rapides

L'une des raisons du succès rencontré par les méthodes basées sur la transformation de Fourier tient dans l'existence d'algorithmes rapides de calcul qui leur sont associées (la fameuse FFT pour Fast Fourier Transform). L'implémentation brutale de la transformation en ondelettes continue obtenue par discrétisation donne des algorithmes très lents qui utilisent beaucoup de mémoire. De plus, il n'existe pas de reconstruction exacte.

Les ondelettes doivent leur succès au développement d'algorithmes rapides d'analyse et de synthèse basés sur les idées simples des filtres digitaux. Les transformations en ondelettes discrètes, pour peu que l'ondelette soit convenablement choisie, sont naturellement associées à des algorithmes qui peuvent être encore plus efficaces que les algorithmes de FFT dont la complexité est de $O(N \log N)$.

Transformée en ondelettes redondante ou non-redondante

Les décompositions en ondelettes existent dans plusieurs versions, que l'on choisit en fonction de l'application visée. On distingue principalement deux types de décompositions en ondelettes. La première fournit des décompositions non-redondantes, dans lesquelles les ondelettes considérées sont exactement en "nombre suffisant" pour caractériser la fonction analysée. L'alternative consiste à travailler avec des familles surabondantes d'ondelettes.

Transformée en ondelettes non-redondante (ou décimée)

Dans la première catégorie de décomposition en ondelettes, les ondelettes forment alors une base orthonormée de l'espace considéré et le nombre de coefficients d'ondelettes calculés est alors égal au nombre d'échantillons du signal de départ. Chaque élément de la base est orthogonal aux autres. Ces bases d'ondelettes sont très utilisées, en particulier pour des applications en compression des signaux, pour leurs qualités à représenter les signaux de manière parcimonieuse.

Dans certaines conditions, on utilise des bases bi-orthogonales pour plus de flexibilité. On dispose alors de deux familles de fonctions d'échelle formant chacune une base, l'une utilisée pour la décomposition (ou analyse) $\varphi(x)$ et l'autre pour la reconstruction (ou synthèse) $\tilde{\varphi}(x)$ mais la transformée reste exacte et non-redondante.

Dans le cas d'une transformation en ondelettes non redondante, le nombre de coefficients d'ondelettes calculés est égal au nombre d'échantillons N contenus dans le signal de départ. On montre également que les algorithmes correspondants de décomposition en base d'ondelettes et de reconstruction sont de complexité N .

Transformée en ondelettes redondante (ou non-décimée)

Les familles d'ondelettes ne forment pas forcément des bases. On utilise alors des trames d'ondelettes qui sont des familles surabondantes d'ondelettes. Ces décompositions redondantes sont très utilisées en analyse des signaux par exemple dans le filtrage. Le nombre de coefficients d'ondelettes est choisi de telle manière que chaque échelle ait le même nombre de coefficients en ondelettes que le signal de départ. Elles permettent notamment de facilement localiser les composantes du signal à chaque échelle.

3.4 Les transformations bidimensionnelles

Les applications des ondelettes sont nombreuses aujourd'hui et n'ont cessé de se développer ces dernières années, à tel point qu'on a parfois voulu en faire l'outil idéal, adapté à tous les problèmes. S'il est vrai que les ondelettes sont optimales, pour l'analyse d'une grande classe de signaux unidimensionnels : les signaux lisses par morceaux, pour l'analyse des signaux bidimensionnels, elles rencontrent des difficultés à représenter des images avec des composantes fortement anisotropes. Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord présenter deux transformations en ondelettes parmi les plus utilisées en astrophysique. Nous introduirons ensuite, deux nouvelles représentations multi-échelles.

3.4.1 La transformation en ondelettes bi-orthogonale

De nombreux algorithmes de transformations en ondelettes ont été développés ([Mallat 1999](#)) La transformation en ondelettes la plus utilisée est la transformation en ondelettes bi-orthogonale. qui décompose un signal 1D comme suit :

$$S(x) = \sum_{\eta} \tilde{\varphi}_{J,\eta}(x) c_J(\eta) + \sum_{\eta} \sum_{j=1}^J \tilde{\psi}_{j,\eta}(x) w_j(\eta), \quad (3.16)$$

avec $\varphi_{j,\eta} = 2^{-j}\varphi(2^{-j}x - \eta)$ et $\psi_{j,\eta} = 2^{-j}\psi(2^{-j}x - \eta)$, où φ et ψ sont respectivement la fonction d'échelle et la fonction ondelette. J est le nombre d'échelles utilisées pour la décomposition, w_j correspond aux coefficients en ondelettes à l'échelle j et c_J est une version lissée du signal S . Notons que seules les échelles dyadiques¹ sont considérées.

Les coefficients $c_j(\eta)$ et $w_j(\eta)$ sont obtenus grâce aux filtres de décomposition h et g :

$$\begin{aligned} c_{j+1}(l) &= \sum_k h(\eta - 2l) c_j(\eta), \\ w_{j+1}(l) &= \sum_k g(\eta - 2l) c_j(\eta). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les filtres h et g associés respectivement à la fonction d'échelle φ et la fonction ondelette ψ doivent vérifier les équations de dilatation suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{\eta} h(\eta)\varphi(x - \eta), \\ \frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{\eta} g(\eta)\varphi(x - \eta), \end{aligned} \quad (3.18)$$

et la reconstruction du signal est obtenue de la manière suivante :

$$c_j(l) = 2 \sum_k \left(\tilde{h}(\eta + 2l) c_{j+1}(\eta) + \tilde{g}(\eta + 2l) w_{j+1}(\eta) \right), \quad (3.19)$$

¹Les échelles dyadiques correspondent aux échelles qui sont des puissances de 2 de l'échelle initiale.

où les filtres duals $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ doivent vérifier les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{h}^*\left(k + \frac{1}{2}\right)\hat{h}(k) + \hat{g}^*\left(k + \frac{1}{2}\right)\hat{g}(k) &= 0, \\ \hat{h}^*(k)\hat{h}(k) + \hat{g}^*(k)\hat{g}(k) &= 1.\end{aligned}\quad (3.20)$$

En termes de bancs de filtres, la transformation en ondelettes bi-orthogonale devient orthogonale quand $h = \tilde{h}$ et $g = \tilde{g}$.

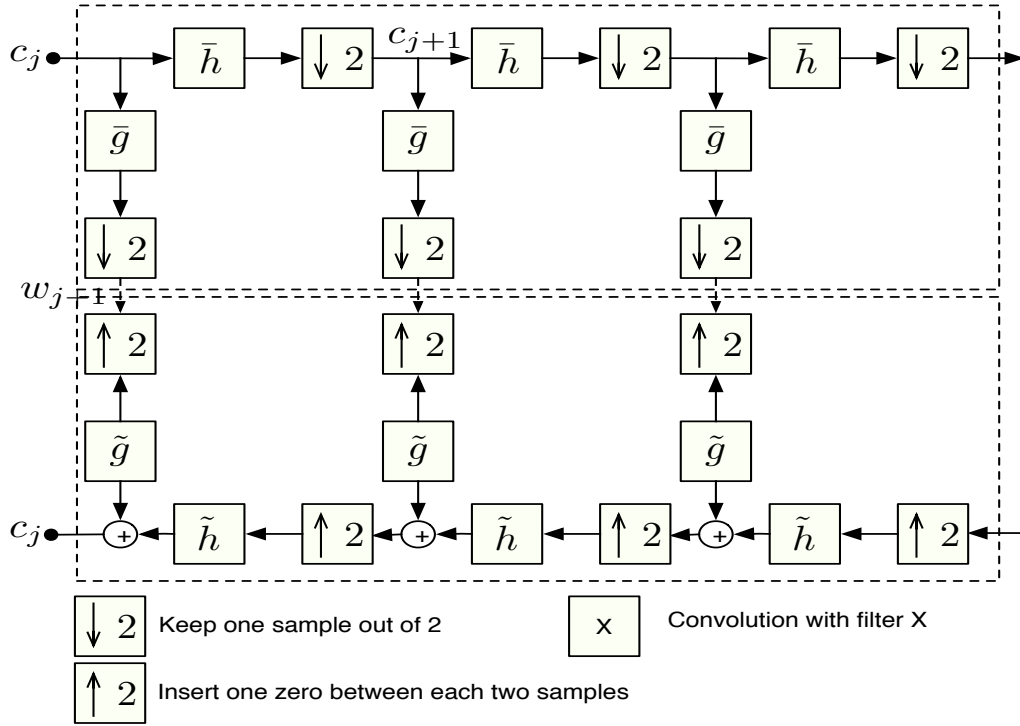


FIG. 3.5 – Algorithme pyramidal rapide associé à la transformation en ondelettes bi-orthogonale. En haut : Décomposition par la transformation en ondelettes rapide en utilisant les filtres $\bar{h}$ et $\bar{g}$ et en supprimant un coefficient sur deux. En bas : Reconstruction par la transformation en ondelettes rapide inverse en insérant des zéros et en utilisant les filtres duals $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$.

A la décomposition, c_{j+1} et w_{j+1} sont calculés en convoluant c_j avec les filtres $\bar{h}(\eta) = h(-\eta)$ (filtre passe-bas) et $\bar{g}(\eta) = g(-\eta)$ (filtre passe-haut). Le résultat de ces deux convolutions est ensuite décimé, en supprimant un coefficient sur 2. w_{j+1} est gardé, et c_{j+1} est utilisé pour calculer c_{j+2} et w_{j+2} et ainsi de suite (voir la Fig. 3.5 en haut). A la reconstruction, on ajoute un 0 entre chaque coefficient de c_j et w_j qui sont ensuite convolués par les filtres duals $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ puis sommés pour obtenir c_{j-1} . La procédure est répétée jusqu'à la plus petite échelle (voir la Fig. 3.5 en bas).

Comparé à la transformation en ondelettes continue, nous avons beaucoup moins d'échelles puisque seules les *échelles dyadiques* sont considérées ($a_j = 2^j a_0$).

L'algorithme 2D est basé sur la séparation des deux variables x et y . Les mêmes filtres h et g décrits précédemment (1D) sont d'abord appliqués dans une direction (x) puis dans

l'autre (y) (voir la Fig. 3.6).

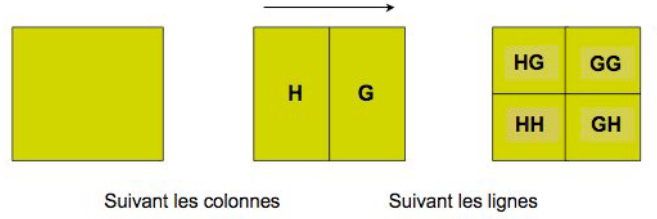


FIG. 3.6 – Schéma pour illustrer une décomposition en ondelettes non-redondante avec une seule échelle en utilisant la transformation en ondelettes bi-orthogonale. On applique les filtres h et g comme si on avait un signal 1D d'abord sur les colonnes puis sur les lignes. La sous-image hh représente le plan lissé, hg contient les structures étirées selon la direction verticale, gg les structures diagonales et gh les structures horizontales

La fonction d'échelle $\varphi(x, y)$ est définie comme suit :

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad (3.21)$$

et les détails à chaque échelle sont obtenus à partir de trois fonctions ondelettes $\psi^i(x, y)$ suivantes :

- l'ondelette verticale $\psi^1(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$,
- l'ondelette horizontale $\psi^2(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$,
- l'ondelette diagonale $\psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$.

On obtient ainsi trois sous-images pour chaque échelle j (où $j = 1 \dots J$).

La transformation en ondelettes bi-orthogonale est optimale pour traiter des images contenant des structures isotropes ou légèrement anisotropes. La Fig. 3.7 montre l'exemple d'une décomposition en ondelettes non-redondante sur une seule échelle en utilisant la transformation en ondelettes bi-orthogonale. On voit bien que chacune des trois sous-images associées à la première échelle a une direction privilégiée. En haut à gauche, on voit ressortir les structures verticales, en haut à droite les structures horizontales et en bas à droite les structures diagonales.

3.4.2 La transformation en ondelettes isotrope non-décimée

La transformation en ondelettes isotrope non-décimée est bien connue dans le domaine de l'astrophysique car les objets astrophysiques tels que les étoiles, les amas... sont le plus souvent isotropes (Slezak et al. 1994; Starck and Murtagh 2002).

Pour de telles données isotropes, les filtres doivent satisfaire certaines conditions :

- Les filtres 1D doivent être symétriques ($h(-x) = h(x)$, et $g(-x) = g(x)$).
- Les filtres 2D : h, g, ψ, φ doivent être isotropes.

Par contre, les filtres n'ont pas besoin d'être orthogonaux ou bi-orthogonaux.

Pour des raisons pratiques, on préférera des filtres séparables $h(x, y) = h(x)h(y)$.

Une fonction d'échelle $\varphi(x)$ qui est couramment utilisée est la fonction B₃spline (voir Fig. 3.8) qui est définie comme suit :

$$\varphi(x) = B_3(r) = \frac{1}{12}(|x-2|^3 - 4|x-1|^3 + 6|x|^3 - 4|x+1|^3 + |x+2|^3). \quad (3.22)$$

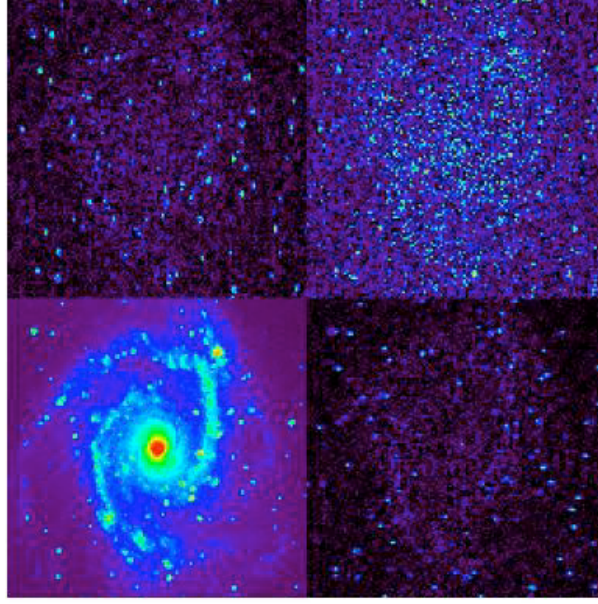


FIG. 3.7 – Résultat d’une transformation en ondelettes bi-orthogonale non-redondante pour une décomposition avec une seule échelle. L’image en haut à gauche fournit les détails correspondant à l’ondelette verticale, en bas à droite les détails correspondant à l’ondelette horizontale, en haut à droite, les détails correspondant à l’ondelette diagonale. Enfin l’image en bas à gauche correspond au plan lissé.

Le filtre h associé 1D est :

$$h = \left(\frac{1}{16} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \right).$$

Il vérifie bien la condition de symétrie.

Pour l’algorithme 2D, on utilise une fonction d’échelle à variables séparées : $\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$. La fonction ondelette ψ associée est :

$$\frac{1}{4}\psi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \varphi(x, y) - \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

elle est définie comme la différence entre deux résolutions (voir Fig. 3.8).

Le filtre h associé 2D est :

$$h = \left(\frac{1}{16} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \right) \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{256} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{128} & \frac{1}{32} & \frac{64}{3} & \frac{1}{32} & \frac{1}{128} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{256} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \end{pmatrix}.$$

L’approche décimée est plus compliquée que celle de la transformation en ondelettes décimée. Mais il existe une manière très efficace de l’implémenter appelée *algorithme à trous* qui a été développé par [Holdschneider et al. \(1989\)](#) et [Shensa \(1992\)](#). Cet algorithme est basé sur le principe de décomposition rapide en ondelettes discrètes proposé par [Mallat \(1999\)](#). $c_{j+1}(l)$ et $w_{j+1}(l)$ peuvent être exprimés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} c_{j+1}(l) &= (\bar{h}_j * c_j)(l) = \sum_{\eta} h(\eta) c_j(l + 2^j \eta), \\ w_{j+1}(l) &= (\bar{g}_j * c_j)(l) = \sum_{\eta} g(\eta) c_j(l + 2^j \eta). \end{aligned} \quad (3.23)$$

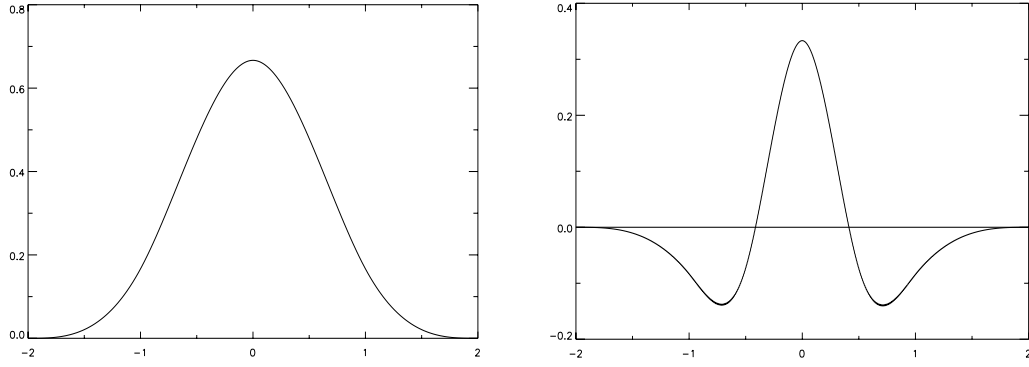


FIG. 3.8 – A gauche, la fonction d'échelle B³spline $\varphi(x)$ et à droite, la fonction ondelette $\psi(x)$.

Le filtre h_j (respectivement g_j) est obtenu en ajoutant $2^j - 1$ zéros entre chaque coefficients de h (respectivement g) d'où le nom de “à trous” donné à l'algorithme.

La transformation en ondelettes “à trous” décompose ainsi une image $I(x, y)$ de la manière suivante :

$$I(x, y) = c_J(x, y) + \sum_{j=1}^J w_j(x, y), \quad (3.24)$$

où c_J est une version lissée de l'image I et w_j représente les détails de I à l'échelle 2^j (voir [Starck and Murtagh 2002](#), pour plus de détails). En sortie de l'algorithme, on obtient $J + 1$ images (souvent appelées échelles ondelettes) de la même taille que l'image de départ.

La reconstruction de l'image à partir de ses coefficients en ondelettes est très simple quand on choisit une B³spline comme fonction d'échelle $\varphi(x, y)$. L'image initiale est la somme de toutes les échelles en ondelettes et du plan lissée pour chaque pixel (x, y) car les filtres de synthèse sont tout simplement : $\tilde{h} = \delta$ et $\tilde{g} = \delta$.

Cette transformation en ondelettes isotrope est bien adaptée pour représenter des images composées de structures fortement isotropes. La Fig. 3.9 montre l'exemple d'une décomposition en ondelettes redondante sur cinq échelles en utilisant la transformation en ondelettes “à trous”. L'image du haut correspond à l'image originale et les images du bas correspondent aux 5 échelles et au plan lissé (en bas à droite).

En dépit du succès que l'analyse en ondelettes a pu rencontrer et de la diversité de ses applications, elle est loin de nous donner une réponse universelle et finale au problème complexe de représentation des signaux. Cependant, elle fournit souvent une réponse qui n'est pas très éloignée de la réponse optimale, ce qui, combiné à la grande simplicité de l'outil et sa grande efficacité algorithmique, explique son succès grandissant. En revanche, dans certains cas bien précis, il est nécessaire de rechercher des techniques permettant de s'approcher plus encore de l'optimalité, tout en essayant de conserver les atouts des ondelettes. Par exemple, un des désavantages de la transformation en ondelettes 2D est qu'elle ne permet pas d'analyser efficacement les images composées de structures fortement anisotropes. Les ondelettes rencontrent en effet des difficultés à représenter les contours contenus dans les images. Un grand nombre de coefficients sont nécessaires échelle par échelle, pour représenter une ligne ou une courbe. Avec autant de coefficients pour approximer un bord, l'analyse devient plus difficile. Les idées classiques de multi-échelles ne s'adressent donc qu'à une portion de tous les phénomènes : ceux qui sont plus ou moins isotropes à toutes les échelles et à toutes les positions. Deux nouvelles transformations : la transformation en *ridgelets* et la transforma-

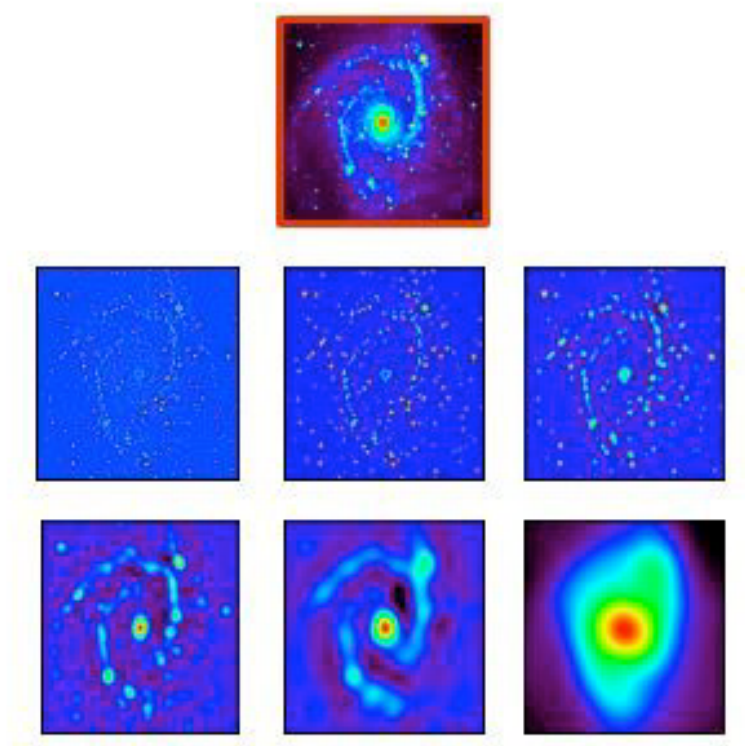


FIG. 3.9 – Résultat d’une transformation en ondelettes redondante sur 5 échelles. En haut, l’image originale, en bas les 5 plans en ondelettes de même taille que l’image originale.

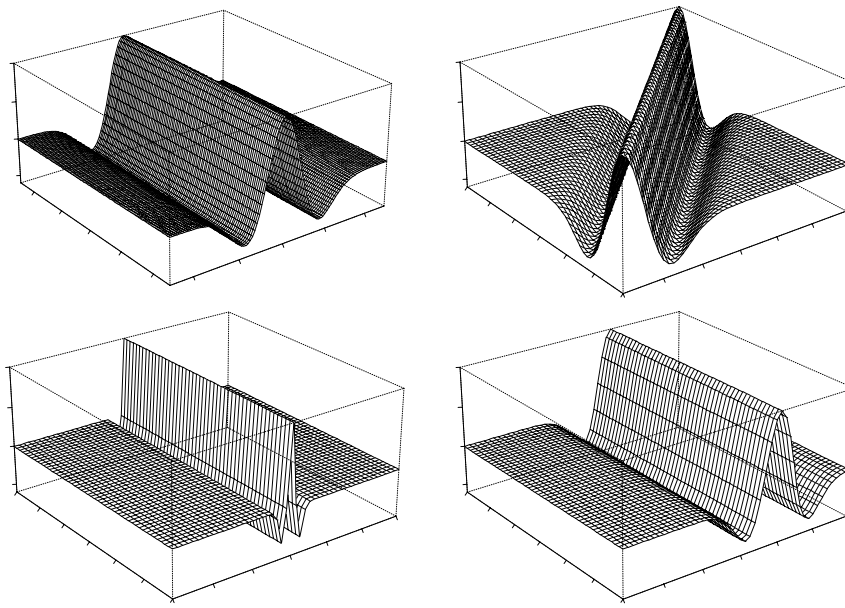
tion en *curvelets*, ont été introduites comme des alternatives à la représentation des images par les ondelettes.

3.4.3 La transformation en ridgelets

La transformation en *ridgelets* a été développée par E. Candès en 1999b pour traiter des images possédant des structures rectilignes et ainsi fournir une bonne représentation des bords parfaitement droits.

Soit une fonction $f(x_1, x_2)$. La représentation en *ridgelets* est la superposition d’éléments de la forme $a^{-1/2}\psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b)/a)$ où ψ est une ondelette, $a > 0$ le paramètre d’échelle, b la paramètre de position et θ le paramètre d’orientation. Une *ridgelet* est constante le long des lignes $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = \text{const}$, et transversalement à cette ligne c’est une ondelette (voir Fig. 3.10). Ainsi, contrairement à une ondelette, la *ridgelet* a deux caractéristiques supplémentaires : une longueur égale à celle de l’image et une orientation permettant ainsi l’analyse de l’image dans toutes les directions.

La transformation en *ridgelets* permet de trouver une représentation optimale dans le cas d’images possédant des structures rectilignes. La transformation en *ridgelets* possède un algorithme rapide et une reconstruction exacte. Cependant en traitement d’images, les bords sont généralement courbes plutôt que rectilignes. Par conséquent les *ridgelets* seules ne permettent pas d’avoir une représentation optimale.

FIG. 3.10 – Quelques *ridgelets*.

3.4.4 La transformation en curvelets

Les *ridgelets* sont essentiellement destinées à traiter des structures rectilignes mais elles peuvent être adaptées pour représenter des objets avec des bords courbes en utilisant une localisation multi-échelles appropriée. La transformation en *curvelets* a donc été introduite par Candès and Donoho (1999a) en suivant ce principe. Elle utilise la transformation en *ridgelets* de manière locale : les *curvelets* approximent une courbe par une suite de segments.

L'idée de la transformation en *curvelets* est de décomposer l'image dans un premier temps en un jeu de plans en ondelettes (en utilisant une transformation en ondelettes). On décompose alors chacun des plans en plusieurs blocs qu'on analyse avec une transformation en *ridgelets*. Comme la transformation en *ridgelets*, la transformation en *curvelets* possède un algorithme rapide (Candès et al. 2006) et sa reconstruction est exacte. Elle fournit ainsi une représentation optimale pour les images possédant des structures fortement anisotropes (Starck et al. 2003, 2004b; Lambert et al. 2006).

3.5 Conclusion

Ce qu'il faut retenir, c'est que la recherche d'une bonne représentation est un problème central en traitement d'image. Selon le type d'image dont on dispose et selon le type d'application, on ne choisira pas la même transformation. Au cours de la dernière décennie, les représentations classiques du signal ont été lentement complétées par un grand nombre de nouvelles représentations multi-échelles. Au lieu de représenter les signaux comme une superposition de sinusoides en utilisant la représentation de Fourier classique, nous avons maintenant à notre disposition un grand nombre d'alternatives telles que les ondelettes (Mallat 1989), les *ridgelets* (Candès and Donoho 1999b) ou encore les *curvelets* (Candès and Donoho 1999a; Starck et al. 2002; Candès et al. 2006), etc... Ces transformations sont le plus souvent redondantes c'est-à-dire que certains éléments de la représentation peuvent s'écrire en fonction d'autres éléments de cette même représentation. La décomposition d'un signal avec ces transformations n'est donc pas unique. Même si ceci peut accroître la complexité de l'analyse,

cela nous donne la possibilité de choisir parmi un grand nombre de transformations, celle qui donne la meilleure représentation des données.

Interpolation des données manquantes

Sommaire

4.1	Interpolation des données manquantes	80
4.1.1	Simulation des données de cisaillement gravitationnel	80
4.1.2	Introduction aux méthodes d' <i>inpainting</i>	82
4.1.3	<i>Inpainting</i> des cartes de convergence incomplètes	87
4.2	Inversion des cartes de cisaillement incomplètes	90
4.2.1	Le problème inverse	91
4.2.2	Algorithme	92
4.2.3	Résultats	92
4.3	Estimation des statistiques d'ordre deux et trois	93
4.3.1	Résultats sur les cartes de convergence	93
4.3.2	Résultats sur les cartes de cisaillement	94
4.4	Conclusion	98

Comme nous l'avons introduit précédemment, la distorsion des images des galaxies lointaines par cisaillement gravitationnel offre une méthode directe pour sonder les propriétés statistiques de la matière noire de l'Univers et cela, sans faire aucune hypothèse sur les relations matière noire - matière visible. L'analyse statistique du cisaillement gravitationnel est ainsi utilisé pour apporter des contraintes sur le modèle cosmologique. Mais l'analyse des données obtenues par effet de lentille gravitationnelle faibles supposent inévitablement de masquer certaines régions du champ afin d'enlever les étoiles brillantes qui saturent le détecteur. Une introduction au problème des données manquantes est proposée §2.4.3. Avoir des données manquantes dans la mesure du cisaillement gravitationnel est naturel mais exige un traitement adéquat. La méthode d'analyse la plus souvent utilisée pour contraindre les paramètres cosmologiques est la fonction de corrélation à deux points (Maoli et al. 2001; Refregier et al. 2002; Bacon et al. 2003; Massey et al. 2005). Cette statistique à deux points à l'avantage de ne pas être biaisée par la présence de données manquantes. Par contre, son estimation est très longue, nécessitant $O(N^2)$ opérations. Il n'est donc pas possible d'utiliser cette méthode pour les futurs grands relevés du ciel. L'estimation de la fonction de corrélation à deux points dans l'espace de Fourier (le spectre de puissance) est beaucoup plus rapide, nécessitant $O(N \log N)$ opérations, mais elle est fortement affectée par la présence de données manquantes.

L'estimation des statistiques à deux points est devenue un point important dans l'analyse de données en cisaillement gravitationnel mais aussi dans d'autres domaines comme l'étude

du CMB. Un grand nombre d'articles abordant le problème de l'estimation de la fonction de corrélation à deux points, ou celle du spectre de puissance, en présence ou non de données manquantes a été publié ces dernières années (Bond et al. 1998; Ruhl et al. 2003; Tegmark 1997; Hivon et al. 2002; Hansen et al. 2002; Szapudi et al. 2001b,a; Efstathiou 2004; Szapudi et al. 2005). Des statistiques d'un ordre supérieur telles que la fonction de corrélation à trois et quatre points ont aussi été étudiées (Bernardeau et al. 2003; Pen et al. 2003; Jarvis et al. 2004) et il a été montré qu'elles pouvaient apporter des contraintes supplémentaires sur les paramètres cosmologiques. Toutes ces méthodes sont détaillées §2.4.3.

La solution qui est proposée dans ce chapitre est de traiter correctement les zones manquantes afin de réduire leur impact sur l'estimation du spectre de puissance et des statistiques d'ordre supérieur. Pour cela, nous utilisons une nouvelle approche appelée *inpainting* qui permet d'interpoler les données manquantes en se basant sur la représentation parcimonieuse des données.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans une première partie, nous présentons cette méthode d'*inpainting* basée sur la parcimonie et nous montrons son application aux données de cisaillement en considérant en première approximation que le masque se trouve dans les cartes de convergence. Dans une deuxième partie, nous considérons, le cas réaliste où le masque se trouve dans les cartes de cisaillement. Nous décrivons alors la méthode, totalement nouvelle, que nous avons développée qui permet de reconstruire une carte de convergence complète à partir des données de cisaillement incomplètes. Enfin, dans une dernière partie, nous montrons l'efficacité de cette méthode pour l'estimation des statistiques à deux et trois points.

4.1 Interpolation des données manquantes

Les données manquantes présentes dans les données de cisaillement gravitationnel ont besoin d'être manipulées correctement. Dans ce paragraphe, nous décrivons une méthode d'interpolation des données manquantes basée sur la représentation parcimonieuse des données. Et nous présentons une application de cette méthode aux données de cisaillement en considérant en première approximation que le masque se trouve dans les cartes de convergence. Afin de valider cette méthode, des simulations à N-corps sont utilisées.

4.1.1 Simulation des données de cisaillement gravitationnel

Les simulations numériques, qui reposent notamment sur les modèles cosmologiques théoriques, jouent un rôle particulièrement important en cosmologie. D'une part, la confrontation entre les simulations de modèle cosmologique et les observations diverses de l'Univers permettent de faire progresser notre connaissance de l'Univers et d'élaborer des modèles cosmologiques de plus en plus proche de la réalité. C'est l'utilisation que nous en aurons au chapitre VI. D'autre part, les simulations numériques permettent de valider de nouvelles méthodes de traitement de données. Plus les simulations sont réalistes et plus elles permettent d'éviter des comportements inattendus. Dans ce chapitre et au chapitre V, nous utilisons des simulations numériques réalistes pour valider de nouvelles méthodes de traitement.

Dans ce paragraphe, nous décrivons les simulations réalistes que nous utilisons tout au long de ce chapitre.

Simulations 3D à N-corps

Nous avons simulé des cartes de convergence réalistes en utilisant le code RAMSES (Teysier 2002) qui permet de réaliser des simulations cosmologiques N-corps à maillage adaptatif.

Le modèle cosmologique adopté est un modèle Λ CDM pris en concordance avec les observations de WMAP. Nous avons choisi un modèle avec les paramètres suivants : $\Omega_m = 0.3$, $\sigma_8 = 0.9$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $h = 0.7$ et nous avons fait tourner 33 simulations différentes du même modèle. Chaque simulation contient 256^3 particules avec une taille de boîte de 162 Mpc/h. La précision de la grille est ensuite affinée quand le nombre de particules localement est supérieur à 10. Et ainsi de suite jusqu'à atteindre un niveau maximum de raffinement de 6 qui correspond à une résolution spatiale de 10 kpc/h.

Utilisation du calcul sur grille

La simulation a été déployée sur une architecture de grille conçue en France sous le nom de projet *Grid'5000* (Bolze et al. 2006). Un middle-ware récemment développé appelé DIET (Caron and Desprez 2006) a été utilisé afin de compiler et d'exécuter le code RAMSES sur un système de grille largement inhomogène. Pour cette expérience (Canou et al. 2007), 12 clusters ont été nécessaires sur 7 sites sur une durée de 48 heures. Au total, 816 noeuds de grille ont été utilisés pour cette expérience qui a permis de générer ces 33 simulations. Notons, que l'ensemble de la simulation a tourné en 2 jours et aurait mis plus de deux mois sur un machine avec 32 processeurs.

Simulations de cartes de convergence

En cisaillement gravitationnel, la distribution de masse projetée est donnée par la carte de convergence effective κ_e qui est calculée par intégration de la fluctuation de densité le long de la ligne de visée. Dans cette approche, nous négligeons le fait que la trajectoire des rayons lumineux n'est pas rectiligne, suivant ainsi l'approximation de Born (voir par exemple Bartelmann and Schneider 2001) et nous supposons que toutes les sources sont dans le même plan. La convergence effective ainsi obtenue est :

$$\kappa_e = \frac{3H_0^2\Omega_m}{2c^2} \int_0^w \frac{f_k(w')f_k(w-w')}{f_k(w)} \frac{\delta(f_k(w'))}{a(w')} dw', \quad (4.1)$$

où $f_k(w)$ est la distance comobile de w , H_0 est la constante Hubble, Ω_m est paramètre de densité de matière, c est la vitesse de la lumière et a le facteur d'échelle, δ est la distribution de Dirac.

Dans les simulations 3D à N-corps, les distributions de densité sont représentées en utilisant des particules discrètes. La manière la plus simple de convertir une telle distribution de particules en une densité consiste à diviser la simulation en pixels. Dans le cas le plus général, la lentille est composée de plusieurs plans de matière. On reconstitue ces plans en intégrant la densité de matière sur des tranches de la simulation 3D. Ces tranches sont ensuite projetées pour obtenir des cartes de masse 2D. La carte de convergence effective peut alors être calculée en intégrant une série de ces plans de masse 2D le long de la ligne de visée en utilisant la courbe d'efficacité des effets de lentille gravitationnelle faibles. Cette procédure a déjà été utilisée par Vale and White (2003). La distribution de masse (voir l'équation 4.1) peut ainsi s'exprimer de la manière suivante :

$$\kappa_e \approx \frac{3H_0^2\Omega_m L}{2c^2} \sum_i \frac{\chi_i(\chi_0 - \chi_i)}{\chi_0 a(\chi_i)} \left(\frac{n_p R^2}{N_t s^2} - \Delta r f_i \right), \quad (4.2)$$

où L est la longueur de la boîte, χ sont les distances comobiles, avec χ_0 étant la distance comobile aux galaxies sources. La somme est réalisée sur la boîte i entre les distances comobiles r_1 et r_2 . Le nombre de particules associé à un pixel de la simulation est n_p , le nombre total

de particules dans une simulation est N_t et $s = L_p/L$ où L_p est l'épaisseur du plan créant le cisaillement. R est la taille des cartes 2D et $\Delta r f_i = \frac{r_2 - r_1}{L}$.

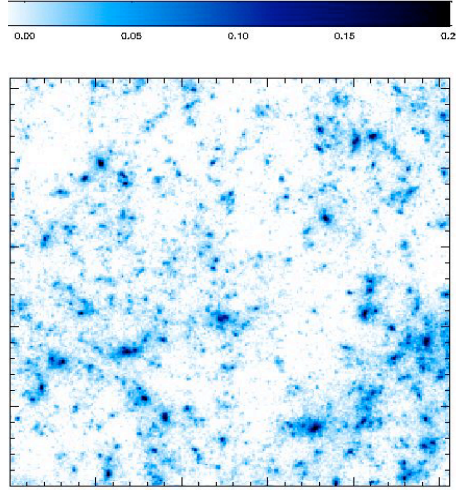


FIG. 4.1 – Carte de convergence simulée pour un modèle Λ CDM avec les paramètres suivants : $\sigma_8 = 0.9$ et $\Omega_m = 0.3$. La région observée est de $1^\circ \times 1^\circ$.

A partir des 33 simulations 3D décrites plus haut, nous avons dérivé 100 cartes de convergence simulées. Sur la Fig. 4.1 on peut voir une des cartes 2D obtenue par intégration des fluctuations de densité 3D sur une des 33 réalisations. Les surdensités correspondent à des amas de galaxies. Les valeurs typiques de κ sont ainsi de l'ordre de quelques pourcents.

Simulation de cartes de convergence avec des données manquantes

Dans nos simulations, nous avons choisi de considérer les deux types de masques présentés Fig. 2.13 afin de voir l'impact de la forme du masque sur la qualité de la méthode. Nous introduisons ainsi ces deux masques dans les cartes de convergence simulées que nous venons de décrire.

4.1.2 Introduction aux méthodes d'inpainting

Nous allons maintenant parler des différentes méthodes d'interpolation d'image associées au terme générique d'*inpainting*. Et nous allons nous intéresser à l'une d'elle, basée sur la représentation parcimonieuse des données.

Les différentes méthodes d'inpainting

Le terme d'*inpainting*, qui signifie interpolation d'image, consiste à restaurer à partir des données restantes une partie de l'image qui a été détériorée ou masquée. Le terme d'*inpainting* a longtemps été utilisé exclusivement par les restaurateurs d'oeuvres d'art qui essayaient de retoucher à la main, de manière la plus fidèle possible, des oeuvres détériorées (voir Fig. 4.2). C'est assez récemment que l'*inpainting* numérique a commencé à susciter un vif intérêt parmi la communauté des mathématiques appliquées grâce à une méthode introduite par Bertalmio et al. (2000). Cette méthode consiste à propager de l'information à partir des frontières des trous en garantissant un certain lissage. Elle mène à un modèle d'équations différentielles partielles non-linéaires (EDP). En suivant ces travaux, de nombreux auteurs ont proposé des nouveaux algorithmes d'*inpainting* (Chan and Shen 2001; Masnou and Morel 2002; Verdera et al. 2003; Bornemann and März 2006; Chan et al. 2006). De nombreuses techniques

d'*inpainting* numérique ont donc été développées et dédiées à des applications diverses : à la restauration d'œuvres d'art bien sûr, à la restauration de photos, pour corriger les erreurs de transmission d'images... Cette grande variété d'applications explique l'engouement important rencontré récemment dans la littérature relative au traitement d'images pour ce type de méthodes.



FIG. 4.2 – A gauche, exemple d'œuvre d'art présentant une éraflure, à droite, l'image après *inpainting* réalisé à la main par des artistes. Détails de "Cornelia Mère de Gracques" par J. Suvée (Louvre).

Plus récemment, [Elad et al. \(2005\)](#) introduit une nouvelle approche d'*inpainting* se basant sur la représentation parcimonieuse du contenu de l'image. Cet algorithme est une extension directe des techniques d'analyse par composantes morphologiques (MCA pour Morphological Component Analysis) ([Starck et al. 2004b](#)) qui permettent de séparer les éléments contenus dans une image quand ces éléments possèdent des caractéristiques morphologiques différentes. Ce type d'analyse décompose une image en plusieurs de ces composantes ou chaque composante est parcimonieuse dans une représentation (ou un dictionnaire) donnée. Les hypothèses de cette méthode sont empruntées à la théorie du Compressed Sensing (CS) récemment développé par [Donoho \(2004\)](#); [Candès et al. \(2004\)](#); [Candès and Tao \(2005, 2004\)](#). Cette nouvelle méthode utilise un a priori de parcimonie dans la solution. Elle suppose qu'il existe une représentation (la transformation en ondelettes, la transformation de Fourier, etc.) où les données complètes sont parcimonieuses et les données incomplètes le sont moins. Par exemple, les bords du masque ne sont pas bien représentés dans la représentation de Fourier introduisant beaucoup de fréquences inutiles. Ainsi la minimisation du nombre de fréquences est une manière de renforcer la parcimonie dans l'espace de Fourier.

La clef de voûte de cette méthode que l'on appellera *inpainting-MCA* est la notion de parcimonie (voir §3.2). En effet, cette méthode suppose qu'il existe une représentation parcimonieuse des données.

Inpainting basé sur une décomposition parcimonieuse

Généralement, le problème d'*inpainting* peut être défini de la manière suivante. Soit X l'image complète, Y l'image observée incomplète et M le masque binaire (c'est-à-dire $M_i = 1$ s'il existe de l'information au pixel i , $M_i = 0$ autrement). Pour résumer, nous avons : $Y = MX$. L'*inpainting* consiste à retrouver X connaissant Y et M .

Dans beaucoup d'applications - telles que la compression, le débruitage, la séparation de sources et bien sûr l'*inpainting* - une bonne représentation du signal est nécessaire pour

assurer la qualité du traitement. Toutes les représentations ne sont pas intéressantes et on a tendance à préférer les représentations parcimonieuses parce qu'elles rendent l'information plus concise et donc plus facilement interprétable. Une représentation parcimonieuse est une représentation où seulement très peu de coefficients ont une valeur significative. Cela signifie que l'on cherche une représentation $\alpha = \Phi^T X$ du signal X dans la représentation ou le dictionnaire Φ où la plupart des coefficients α_i sont proches de zéro, alors que seulement quelques uns ont une valeur absolue significative.

Récemment un grand nombre de nouvelles représentations du signal sont apparues : les ondelettes (Mallat 1989), les *ridgelets* (Candès and Donoho 1999b), les *curvelets* (Candès and Donoho 1999a; Candès et al. 2006)... La plupart de ces bases sont sur-complètes, ce qui signifie que certains éléments du dictionnaire peuvent être obtenus par la combinaison linéaire d'autres éléments du même dictionnaire. Par conséquent, la décomposition dans un tel dictionnaire n'est pas unique. Et bien que cela puisse augmenter la complexité de l'analyse, cela nous donne la possibilité de sélectionner parmi un grand nombre de représentations celle qui représente le mieux les données.

Pour trouver une représentation parcimonieuse, nous devons minimiser :

$$\min_X \|\Phi^T X\|_0 \quad \text{avec} \quad \|Y - MX\|_2 \leq \sigma, \quad (4.3)$$

où $\|z\|_0$ représente la pseudo-norme l_0 , c'est-à-dire le nombre de coefficients z non-nuls et $\|z\|_2$ représente la norme l_2 classique (c'est-à-dire $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_k (z_k)^2}$) et σ représente l'écart-type du bruit dans le cas de données bruitées. Ici nous supposons qu'aucun bruit ne perturbe les données Y , $\sigma = 0$ (c'est-à-dire que la contrainte devient une égalité). Comme nous en discuterons plus tard, l'extension de la méthode pour traiter des données bruitées est directe.

Il a été montré que si $\Phi^T X$ est suffisamment parcimonieux, la pseudo-norme l_0 peut être remplacé par la norme l_1 (c'est-à-dire $\|z\|_1 = \sum_k |z_k|$) (Donoho and Huo 2001). La solution d'une telle optimisation peut alors être obtenue en utilisant un algorithme itératif de seuillage appelé MCA (Elad et al. 2005) :

$$X^{n+1} = \Delta_{\Phi, \lambda_n}(X^n + M(Y - X^n)), \quad (4.4)$$

où l'opérateur non-linéaire $\Delta_{\Phi, \lambda}(Z)$ réalise les opérations suivantes :

- décomposition du signal Z sur le dictionnaire Φ pour dériver les coefficients $\alpha = \Phi^T Z$.
- seuillage des coefficients : $\tilde{\alpha} = \rho(\alpha, \lambda)$, où l'opérateur de seuillage ρ peut être soit un *hard-thresholding* (i.e. $\rho(\alpha_i, \lambda) = \alpha_i$ si $|\alpha_i| > \lambda$ et 0 autrement) ou un *soft-thresholding* (i.e. $\rho(\alpha_i, \lambda) = \text{sign}(\alpha_i) \max(0, |\alpha_i| - \lambda)$). Le *hard-thresholding* correspond à l'optimisation avec la norme l_0 alors que le *soft-thresholding* celle avec la norme l_1 .
- reconstruction de $\tilde{Z}$ à partir des coefficients seuillés $\tilde{\alpha}$.

Le seuil λ_n décroît à chaque itération et la décroissance du seuil joue un rôle important. Cela permet d'éviter de converger vers des minimums locaux. Plus de détails concernant le problème d'optimisation peuvent être trouvés dans Combettes and Wajs (2005); Fadili et al. (2007). Pour beaucoup de dictionnaires tels que les ondelettes ou Fourier, des opérateurs rapides de décomposition existent ainsi l'itération de l'équation 4.4 est rapide. A chaque itération, il suffit de réaliser une transformation directe, de seuiller les coefficients et de faire ensuite la transformation inverse. Le cas où le dictionnaire est l'union de sous-dictionnaire $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_T\}$ où chaque Φ_i possède un opérateur de décomposition rapide a également été étudié (Starck et al. 2004b; Elad et al. 2005; Fadili et al. 2007).

En général, il existe quelques restrictions concernant l'utilisation de l'*inpainting* basé sur la parcimonie. Tout d'abord, la méthode d'*inpainting* suppose qu'une bonne représentation

pour les données ne doit pas être une bonne représentation pour les trous. Ce qui signifie que les structures de l'image doivent pouvoir être représentées à l'aide d'un petit nombre de coefficients, mais si on enlève une partie des données un grand nombre de coefficients doit être nécessaire pour tenir compte du ou des trous. En minimisant le nombre de coefficients significatifs parmi tous ces coefficients, les données initiales peuvent être approximées. La deuxième restriction consiste à dire que les trous dans les données doivent être plus petits que les éléments du dictionnaire si l'on veut que l'*inpainting* reste possible. En effet, si un trou enlève une partie d'un objet qui est bien représenté par un élément du dictionnaire, cet objet pourra facilement être retrouvé. Par contre si la totalité de l'objet est masqué, il est évident qu'il ne sera jamais reconstruit.

Quelques expériences

Nous allons commencer par essayer d'expliquer simplement le principe d'*inpainting* basée sur la parcimonie. Prenons l'exemple d'une fonction sinusoïde (voir Fig. 4.3 en haut à gauche). La meilleure représentation d'une sinusoïde est donnée par la transformée de Fourier, qui représente le signal grâce à un seul coefficient non nul (voir Fig. 4.3 en bas à gauche). Si maintenant on introduit un masque (voir sur la Fig. 4.3 en haut à droite), la transformée de Fourier de cette sinusoïde tronquée est composée d'un coefficient fort, le même que précédemment, et d'un certain nombre de petits coefficients qui sont dus à la présence du masque (voir la Fig. 4.3 en bas à droite). En minimisant le nombre de coefficients significatifs, on peut reconstruire parfaitement la sinusoïde.

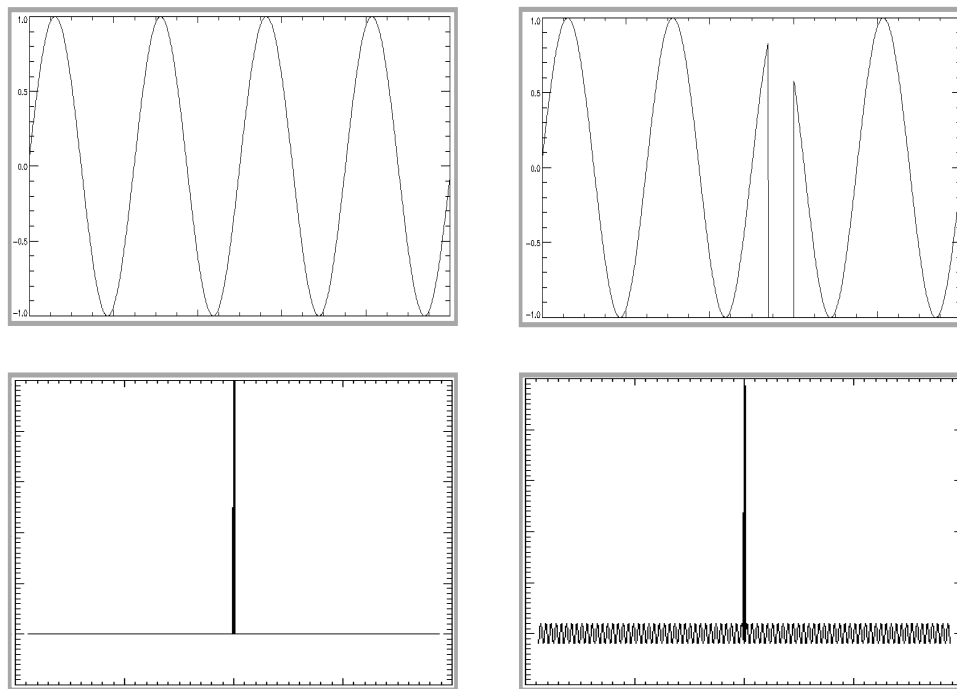


FIG. 4.3 – En haut à gauche, une fonction sinusoïde, en haut à droite, la même fonction sinusoïde tronquée, en bas à gauche la transformée de Fourier de la fonction sinusoïde et en bas à droite, la transformée de Fourier de la fonction sinusoïde tronquée.

Nous allons maintenant voir quelques expériences sur plusieurs types d'images afin de comprendre un peu mieux le principe de la méthode *inpainting-MCA*.

Dans une première expérience, nous avons masqué 50% des pixels d'une image. Les pixels

à masquer ont été choisis de manière aléatoire. Sur la Fig. 4.4, en haut à gauche, on peut voir l'image originale, en haut à droite l'image masquée et en bas, l'image interpolée. L'interpolation a été réalisée en utilisant la combinaison de deux représentations : la base des *curvelets* et la base des cosinus (i.e. DCT pour Digital Cosine Transform). Les *curvelets* permettent de bien reconstruire les contours de la plage et la DCT permet de retrouver la texture de l'image. Le résultat final est très proche de l'image de départ. Lorsque les données manquantes sont distribuées de manière aléatoire, l'interpolation est assez simple car les zones manquantes sont toutes de petite taille.

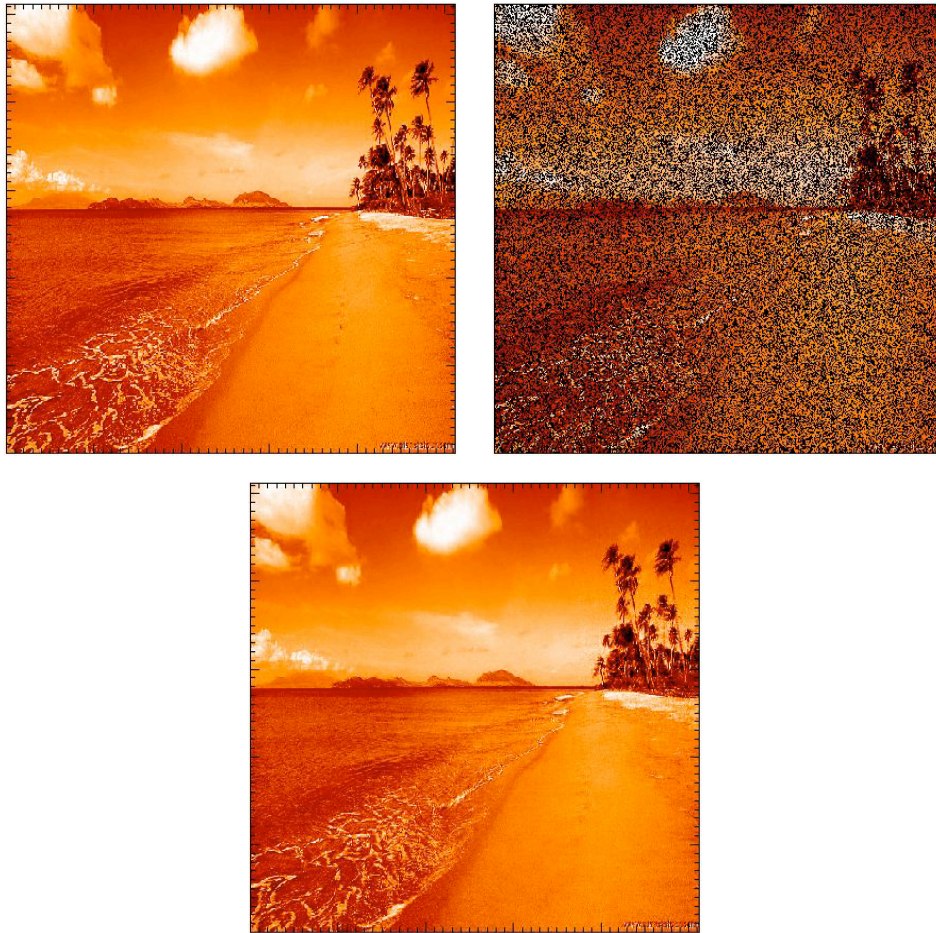


FIG. 4.4 – En haut à gauche, l'image originale, en haut à droite, l'image avec 50% de pixels masqués, en bas, l'image après interpolation par la méthode d'*inpainting-MCA* en utilisant la base des Curvelets et de la DCT (Digital Cosinus Transform) locale.

Dans une deuxième expérience, nous avons masqué une nouvelle fois 50% des pixels d'une image, mais cette fois sous forme de gros masques, comme on peut le voir sur la Fig. 4.5. L'interpolation devient plus délicate quand les trous sont larges. D'autre part, quand les trous sont placés de manière régulière comme sur notre image, si le masque peut être représenté de manière parcimonieuse par la base qui représente le mieux le signal, on reconstruit malheureusement le masque. Cette méthode d'*inpainting* suppose que le signal et le masque sont totalement décorrélés ce qui n'est pas parfaitement le cas dans notre exemple. La meilleure représentation pour cette image est obtenue grâce à la combinaison de deux représentations : les ondelettes bi-orthogonales et la DCT locale. Notons tout de même que si la forme du masque avait été différente, les *ridgelets* ou les *curvelets* auraient été bien meilleures que les

ondelettes bi-orthogonales pour représenter notamment les contours du bureau.



FIG. 4.5 – A gauche, l'image avec 50% de pixels masqués, à droite, l'image après *inpainting* en utilisant des ondelettes bi-orthogonales et la DCT locale.

Dans une dernière expérience, nous avons masqué 20% des pixels d'une image mais en s'assurant de prendre un masque décorrélié de l'image. Sur la Fig. 4.6 à gauche, on peut voir l'image masquée et à droite, le résultat de l'interpolation par la méthode *inpainting-MCA*. La meilleure représentation pour ce type d'image est la combinaison de deux dictionnaires : les *curvelets* que permettent de bien représenter les contours des feuilles et la DCT qui permet de rendre la texture de l'image. Visuellement, le résultat de l'interpolation des données manquantes est très bon. On voit notamment que le contour des feuilles est très bien restitué.

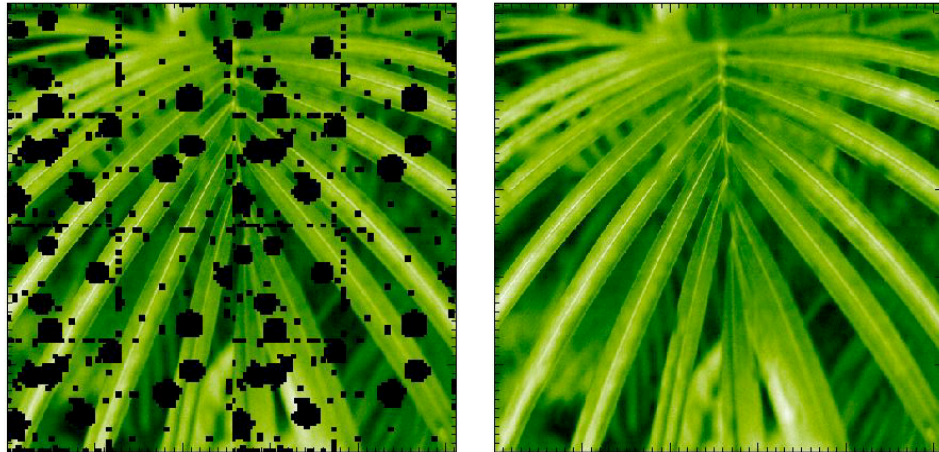


FIG. 4.6 – A gauche, l'image avec 20% de pixels masqués, en bas, l'image après *inpainting* en utilisant des *curvelets* et la DCT locale.

4.1.3 Inpainting des cartes de convergence incomplètes

Dans ce paragraphe, nous allons discuter le choix du dictionnaire pour les données de cisaillement gravitationnel en considérant que le masque se trouve dans la carte de convergence. Dans la partie suivant, nous considérerons le cas plus réaliste où les masques se trouvent dans les cartes de cisaillement.

Représentation parcimonieuse des données de cisaillement gravitationnel

Pour réaliser une interpolation d'image en utilisant la méthode d'inpainting-MCA, une étape importante consiste à trouver un dictionnaire permettant de représenter l'image de manière parcimonieuse. Le dictionnaire que nous cherchons peut être construit grâce à l'union de plusieurs sous-dictionnaires, chacun de ces dictionnaires étant bien adapté pour décrire une des caractéristiques du signal. Pour des raisons de temps de calcul, nous nous sommes intéressés uniquement à des décompositions associées à des opérateurs rapides.

Les données de cisaillement gravitationnel présentent à la fois des caractéristiques isotropes et anisotropes. Elles sont composées de structures telles que les amas de galaxies mais également de structures filamenteuses. Il faut donc trouver une représentation parcimonieuse pour décrire chacune des structures qui composent les données. Or les bases qui représentent le mieux les objets isotropes ne sont pas les mêmes qui représentent le mieux les objets anisotropes. Nous avons par conséquent examiné plusieurs sous-dictionnaires, que voici :

- des sous-dictionnaires isotropes tels les transformations en ondelettes "à trous"
- des sous-dictionnaires légèrement anisotropes tels que les transformations en ondelettes bi-orthogonales
- des sous-dictionnaires fortement anisotropes tels que les *curvelets*
- des sous-dictionnaires de texture tels la transformation en cosinus (DCT pour Discrete Cosine Transform)

Nous avons alors essayé plusieurs combinaisons de ces sous-dictionnaires. Une manière simple de tester la parcimonie d'une représentation donnée peut se faire par l'estimation de l'erreur d'approximation non-linéaire l_2 sur l'image complète, c'est-à-dire de l'erreur obtenue par la reconstruction en ne gardant que les N coefficients les plus grands. Sur la Fig. 4.7, on peut voir l'erreur de reconstruction en fonction de N .

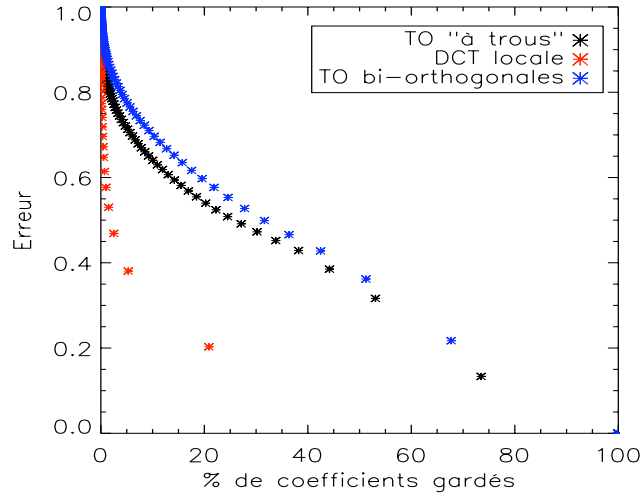


FIG. 4.7 – Erreur d'approximation non-linéaire l_2 en fonction du pourcentage de coefficients gardés à la reconstruction obtenue avec la transformation en ondelettes "à trous" (en noir), la DCT locale avec une taille de bloc de 256 pixels (en rouge) et la transformation en ondelettes bi-orthogonales (en bleu). La représentation donnée par la DCT locale est la meilleure pour les cartes de cisaillement gravitationnel.

Nous pensons que la transformation en ondelettes serait la meilleure représentation pour les données de cisaillement gravitationnel, parce qu'elle est bien adaptée pour représenter les

structures isotropes telles que les amas. Étonnamment, la meilleure représentation pour les données de cisaillement gravitationnel est obtenue avec une DCT locale. Des représentations plus sophistiquées permettent de bien retrouver les amas de galaxies mais néglige la texture des données. Même la combinaison d'une DCT locale avec un autre dictionnaire (isotrope ou non) donne de moins bons résultats. Une explication à cela est que les ondelettes sont également bien adaptées pour représenter les trous.

Algorithme

Ayant choisi le dictionnaire Φ qui représente le mieux les données de cisaillement, il nous faut minimiser le nombre de coefficients non-nuls (voir l'équation 4.3). Pour cela, nous utilisons un algorithme itératif comme celui présenté dans [Elad et al. \(2005\)](#). Cet algorithme a besoin en entrée de l'image incomplète Y et du masque binaire M . L'algorithme que nous avons développé est le suivant :

1. On fixe le nombre d'itérations maximum à I_{max} , la solution X^0 est prise égale à 0, le résidu R^0 est choisi égal à Y , le seuil maximum $\lambda_{max} = \max(|\alpha = \Phi^T Y|)$, le seuil minimum $\lambda_{min} = 0$.
2. On fixe n égal à 0, $\lambda_n = \lambda_{max}$. On itère :
 3. $U = X^n + MR^n$ et $R^n = (Y - X^n)$.
 4. On réalise la transformation de U : $\alpha = \Phi^T U$.
 5. On détermine le seuil : $\lambda_n = F(n, \lambda_{max}, \lambda_{min})$.
 6. On réalise un *hard-thresholding* des coefficients α en utilisant λ_n : $\tilde{\alpha} = S_{\lambda_n}\{\alpha\}$.
 7. On reconstruit $\tilde{U}$ à partir des coefficients seuillés α et $X^{n+1} = \Phi \tilde{\alpha}$.
 8. $n = n + 1$ et si $n < I_{max}$, on retourne à l'étape 3.

Φ^T représente l'opérateur de la DCT. La manière dont le seuil décroît à chaque itération est important. On doit faire un compromis entre la vitesse de l'algorithme et sa qualité. La fonction F fixe la décroissance du seuil. Une décroissance linéaire est donnée par :

$F(n, \lambda_{max}, \lambda_{min}) = \lambda_{max} - \frac{n(\lambda_{max} - \lambda_{min})}{I_{max} - 1}$. En pratique, on utilise une loi de décroissance plus rapide qui est la suivante : $F(n, \lambda_{max}, \lambda_{min}) = \lambda_{min} + (\lambda_{max} - \lambda_{min})(1 - \text{erf}(2.8n/I_{max}))$.

Des contraintes peuvent aussi être ajoutées à la solution pour en améliorer la qualité. A chaque itération, nous avons renforcé la variance de la solution X^{n+1} , en multipliant par un facteur multiplicatif les pixels à l'intérieur du masque, de telle sorte que la variance à l'intérieur du masque soit la même qu'à l'extérieur. Le seul paramètre est donc le nombre d'itérations I_{max} . Afin de connaître l'impact de ce paramètre, nous avons réalisé l'expérience suivante : nous avons estimé l'erreur sur le spectre de puissance moyen $\langle E_{P_\kappa}(I_{max}) \rangle$ pour différentes valeurs de I_{max} (voir Fig. 4.8).

L'erreur sur l'estimation du spectre de puissance est calculée comme suit :

$$\langle E_{P_\kappa}(I_{max}) \rangle = \frac{1}{N_m} \sum_m \left[\frac{1}{N_q} \sum_q (P_{\tilde{\kappa}_{I_{max}}^m}(q) - P_\kappa(q))^2 \right], \quad (4.5)$$

où $\tilde{\kappa}_{I_{max}}^m$ représente la m^{ieme} carte interpolée avec un nombre d'itérations maximum égal à I_{max} , N_q est le nombre de points du spectre de puissance et N_m est le nombre de cartes utilisées pour l'estimation du spectre de puissance moyen.

Sur la Fig. 4.8, on voit bien que l'erreur sur l'estimation du spectre de puissance moyen décroît pour atteindre un plateau pour $I_{max} > 100$. Nous avons ainsi fixé le nombre d'itérations maximum à 100.

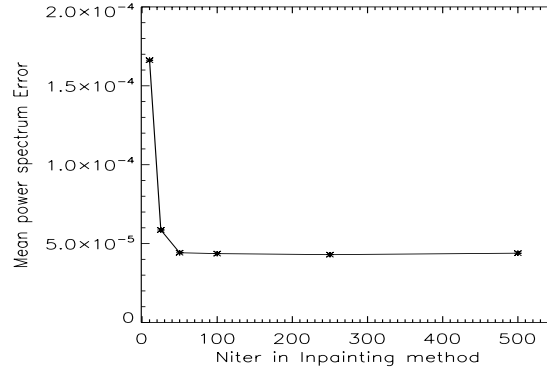


FIG. 4.8 – Erreur sur le spectre de puissance moyen en fonction du nombre d'itérations maximum utilisé pour la méthode d'*inpainting* en utilisant des cartes de cisaillement avec les masques du relevé CFHTS.

Traitement du bruit

Si les données contiennent du bruit, il est très facile de le prendre en compte. En effet, les techniques de seuillage sont très robustes à la présence de bruit puisqu'elles sont régulièrement utilisées pour l'enlever. Dans l'algorithme décrit précédemment, une image filtrée et interpolée peut être obtenue en sortie de l'algorithme en choisissant un seuil minimal λ_{min} égal à $\tau\sigma$ à la place de 0, où σ est l'écart-type du bruit et τ est une constante qui est généralement choisie entre 3 et 5. Cependant, même si les données sont bruitées, il est parfois souhaitable de ne pas les filtrer afin de ne pas introduire de biais dans de futures analyses telles que l'estimation du spectre de puissance. Dans ce cas là, on gardera un seuil minimum λ_{min} égal à 0 et la méthode d'*inpainting* essaiera de reproduire également la texture du bruit (comme s'il faisait partie intégrante du signal). Evidemment, on ne retrouvera pas le vrai bruit tel qu'il serait s'il n'y avait pas de données manquantes mais ces propriétés statistiques doivent être semblables à celles du reste de l'image. Comme nous le verrons §4.3.2, nos expériences confirment cette affirmation.

Résultats

Nous présentons ici le résultat de l'algorithme *inpainting*-MCA sur des données simulées de cisaillement gravitationnel décrites §4.1.1. Le cas des données bruitées n'a pas été considéré dans cette expérience, il le sera §4.2.3.

Cette expérience a été menée sur deux cartes de convergence simulées. Sur l'une on a appliqué le masque du relevé de CFHTLS et sur l'autre le masque du relevé Subaru (voir Fig. 4.9). Les deux images du haut représentent deux cartes de convergence simulées (voir §4.1.1). Les images au milieu, représentent les cartes de convergence simulées avec le masque du relevé du CFHTLS (à gauche) et celui du masque du relevé de Subaru (à droite). Le résultat de la méthode *inpainting*-MCA est donné par les deux images du bas permettant de faire une première estimation visuelle de la qualité de l'algorithme. Ce résultat a été obtenu en utilisant une seule représentation, la DCT, et en prenant $I_{max} = 100$. Notons que les zones masquées ne sont plus reconnaissables à l'oeil sur les cartes de convergence corrigées.

4.2 Inversion des cartes de cisaillement incomplètes

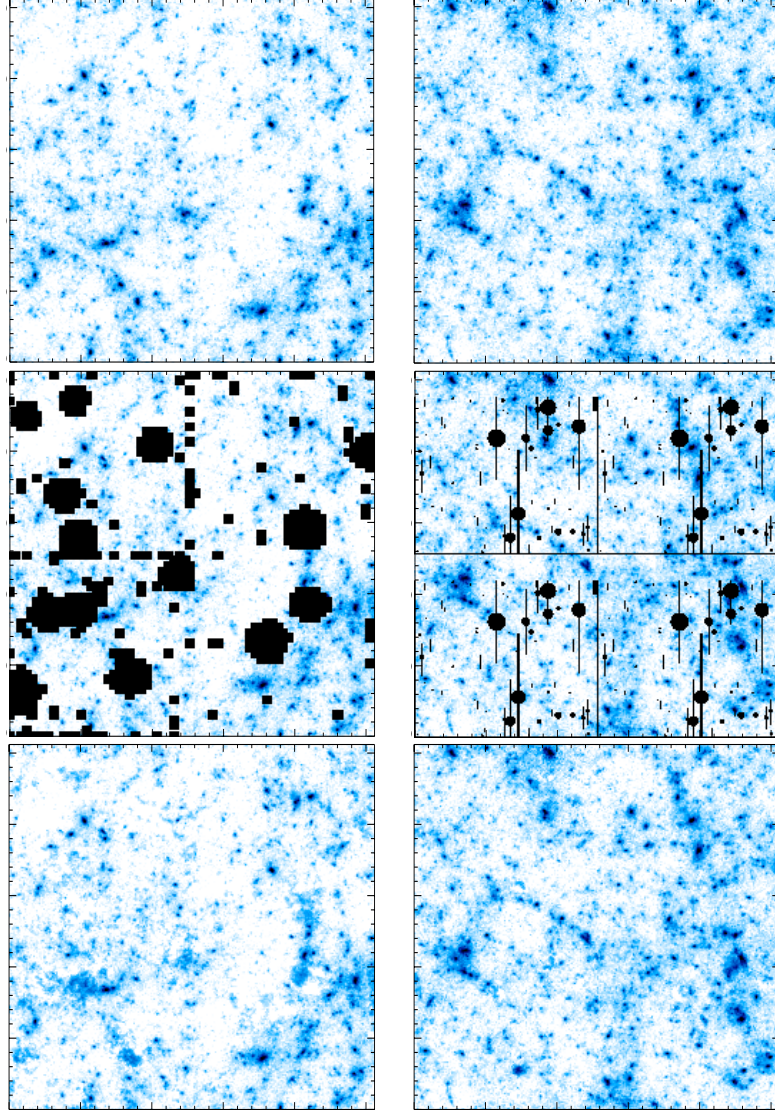


FIG. 4.9 – En haut, cartes de convergence simulées. Au milieu, cartes de convergence simulées avec le masque du relevé CFHTLS (à gauche) et le masque du relevé du Subaru (à droite). En bas, cartes de convergence interpolées avec la méthode *inpainting*-MCA. Le champ couvre une région de $1^\circ \times 1^\circ$.

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié l'impact du masque sur les cartes de convergence qui est une bonne approximation au premier ordre. Cependant, dans les vraies données, les masques liés aux étoiles brillantes se trouvent dans les cartes de cisaillement. Ils proviennent du fait que la mesure du cisaillement est impossible autour de ces étoiles saturées. Le masque lié aux étoiles saturées est donc appliqué aux cartes de cisaillement (c'est-à-dire aux données initiales). Dans ce paragraphe nous étudions ce nouveau cas, et nous développons une méthode pour reconstruire une carte de convergence κ complète à partir des cartes de cisaillement incomplètes γ (voir l'équation 1.19 et l'équation 1.20).

4.2.1 Le problème inverse

Dans les données obtenues par mesure de l'effet de lentille gravitationnelle faible, le cisaillement $\gamma_i(\theta)$ avec $i = 1, 2$ est dérivé à partir des formes des galaxies à la position θ dans

l'image. On peut ensuite reconstruire la distribution de masse projetée (et normalisée) $\kappa(\theta)$ à partir des cartes de cisaillement incomplètes $\gamma_i(\theta)$ en inversant les équations 1.19 et 1.20.

Pour cela nous avons utilisé l'estimateur des moindres carrés proposé dans [Starck et al. \(2006b\)](#) :

$$\tilde{\kappa} = P_1 * \gamma_1 + P_2 * \gamma_2, \quad (4.6)$$

avec $\gamma_i = P_i * \kappa$, où $*$ représente l'opérateur de convolution.

Quand les données sont incomplètes, nous avons :

$$\gamma_i = M(P_i * \kappa), \quad i = 1, 2. \quad (4.7)$$

Pour traiter des masques appliqués aux cartes de cisaillement, la meilleure représentation des données de cisaillement Φ reste la DCT mais la fonction à minimiser est cette fois-ci :

$$\min_{\kappa} \|\Phi^T \kappa\|_0 \quad \text{avec} \quad \sum_i \|\gamma_i - M(P_i * \kappa)\|^2 \leq \sigma. \quad (4.8)$$

Ainsi de la même manière que pour l'équation 4.3, nous pouvons reconstruire la carte de convergence complète κ à partir des cartes de cisaillement incomplètes γ_i en utilisant l'algorithme itératif ci-dessous.

4.2.2 Algorithme

1. On fixe le nombre d'itérations maximum à I_{max} , la solution $\kappa^0 = 0$, le résidu $R^0 = P_1 * \gamma_1^{obs} + P_2 * \gamma_2^{obs}$ (voir équation 4.6), le seuil maximum $\lambda_{max} = \max(|\alpha = \phi^T Y|)$, le seuil minimum $\lambda_{min} = 0$.
2. On fixe n égale à 0, $\lambda_n = \lambda_{max}$. On itère :
 3. $U = \kappa^n + MR^n(\gamma^{obs})$ et $R^n(\gamma^{obs}) = P_1 * (\gamma_1^{obs} - P_1 * \kappa^n) + P_2 * (\gamma_2^{obs} - P_2 * \kappa^n)$
 4. On réalise la transformation de U : $\alpha = \Phi^T U$.
 5. On détermine le seuil $\lambda_n = F(n, \lambda_{max}, \lambda_{min})$.
 6. On réalise un *hard-thresholding* des coefficients α en utilisant λ_n : $\tilde{\alpha} = S_{\lambda_n}\{\alpha\}$.
 7. On reconstruit $\tilde{U}$ à partir du seuil α et $\kappa^{n+1} = \Phi \tilde{\alpha}$.
 8. $n = n + 1$ et si $n < I_{max}$, retourner à l'étape 3.

Φ^T représente l'opérateur de la DCT. Le résidu R_n est estimé à partir des cartes de cisaillement γ_1^{obs} et γ_2^{obs} . Par conséquent, la FFT doit être utilisée à chaque itération n pour calculer d'une part, la carte de convergence à partir des cartes de cisaillement (équation 4.6) et inversement (équation 2.12). F suit la même loi de décroissance que celle décrit §4.1.3.

4.2.3 Résultats

Dans cette nouvelle expérience, nous considérons cette fois-ci des cartes de cisaillement masquées. Sur la Fig. 4.10, on peut voir le résultat obtenu avec les masques du relevé de CFHTLS et de Subaru. Ce résultat a été obtenu grâce à la méthode d'inpainting-MCA en utilisant la DCT et avec $I_{max} = 100$. Comme précédemment, l'interpolation des données manquantes est visuellement très bonne. Notons que l'interpolation qui a été faite dans les zones masquées à partir des cartes de convergence incomplètes (voir Fig. 4.9) est différente de celle estimée à partir des cartes de cisaillement incomplètes (voir Fig. 4.10).

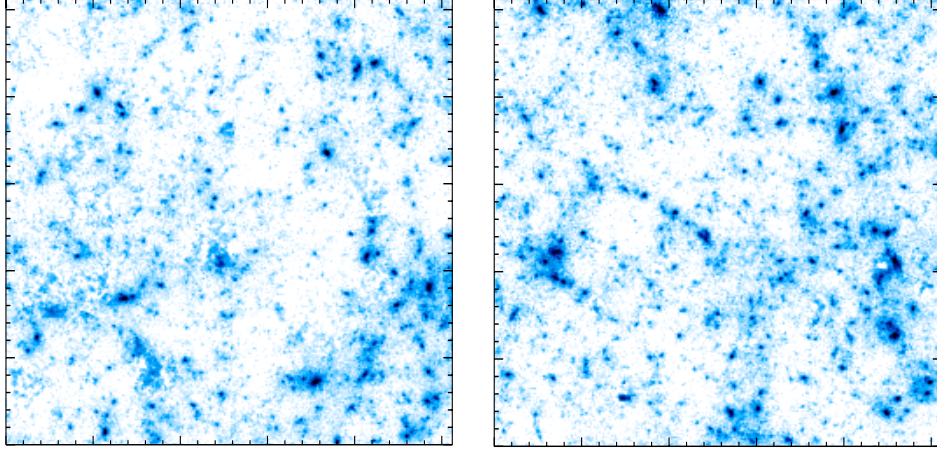


FIG. 4.10 – Cartes de convergence reconstruites à partir des cartes de cisaillement incomplètes masquées avec le masque du relevé du CFHTLS (à gauche) et avec le masque du relevé Subaru (à droite). Le champ couvre une région de $1^\circ \times 1^\circ$.

4.3 Estimation des statistiques d'ordre deux et trois

Nous venons de voir que l'interpolation basée sur la méthode d'*inpainting* donne de très bons résultats visuellement. Cependant, le visuel importe peu, ce que nous voulons c'est que les données interpolées possèdent les mêmes propriétés statistiques que les autres données, le but final étant de faire une analyse statistique des cartes de convergence interpolées comme si on manipulait les cartes de convergence originales (complètes). Dans ce paragraphe, afin de tester vraiment la qualité de notre nouvelle méthode, nous estimons l'erreur introduite par les données interpolées dans notre analyse statistique, en utilisant les simulations présentées §4.1.1.

4.3.1 Résultats sur les cartes de convergence

Disposant d'un algorithme rapide pour estimer le spectre de puissance et le bispectre (voir §2.4.2), nous avons pu tester la qualité de notre méthode d'*inpainting* en utilisant les simulations présentées §4.1.1.

Estimation du spectre de puissance des cartes de convergence à partir des cartes de convergence incomplètes

Nous avons réalisé une étude sur 100 cartes de convergence masquées. Cette expérience consiste à estimer le spectre de puissance moyen sur les cartes de convergence complètes et à le comparer au spectre de puissance moyen obtenu sur les cartes de convergence obtenues par interpolation des données manquantes.

Le spectre de puissance moyen est défini comme la moyenne sur les 100 réalisations :

$$\langle P_\kappa \rangle = \frac{1}{N} \sum_m P_{\kappa^m}, \quad (4.9)$$

où N est le nombre de simulations.

L'écart-type empirique qui correspond à l'erreur sur la mesure du spectre de puissance est alors défini par :

$$\sigma_{P_\kappa} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_m (P_{\kappa^m} - \langle P_\kappa \rangle)^2}, \quad (4.10)$$

et la variance cosmique est ainsi égale à $\sigma_c^2 = \sigma_{P_\kappa}^2$.

L'erreur sur l'estimation de la moyenne pour N réalisations est définie par :

$$\sigma_{\langle P_\kappa \rangle} = \frac{\sigma_{P_\kappa}}{\sqrt{N}}. \quad (4.11)$$

On définit alors l'erreur relative sur l'estimation du spectre de puissance $E_{P_\kappa}^R$ de la manière suivante :

$$E_{P_\kappa}^R = \frac{1}{N} \left(\frac{\sum_m P_{\kappa^m} - \sum_m P_{\tilde{\kappa}^m}}{\sum_m P_{\kappa^m}} \right), \quad (4.12)$$

où $\tilde{\kappa}$ représente la carte de convergence interpolée.

Nous avons utilisé la méthode présentée §2.4.2 pour réaliser cette expérience sur les deux masques correspondant respectivement aux relevés du CFHTLS et de Subaru (voir Fig. 2.13). Les spectres de puissance moyens et les erreurs associées sont présentés sur les Fig. 4.11 et Fig. 4.12. Nous pouvons voir que l'erreur maximum sur l'estimation du spectre de puissance est d'environ 2% pour les deux masques.

Temps de calcul : Fonction de corrélation à deux points / spectre de puissance après inpainting

L'estimateur de la FC2pts utilisé est basé sur le comptage du nombre de paires séparées par une distance d . Nous avons choisi cet estimateur car il n'est pas biaisé par la présence de données manquantes et qu'il est facile à mettre en oeuvre, ce qui n'est pas le cas des algorithmes en arbre, difficiles à mettre en oeuvre et dont la précision n'est pas bien définie ! Le problème de notre estimateur est son temps de calcul : sur nos simulations qui couvrent une région de $1.975^\circ \times 1.975^\circ$, en utilisant un PC-linux avec un processeur à 2.5 GHz, 8 heures sont nécessaires pour calculer la fonction de corrélation (en C++) sur tout le champ avec une résolution δd sur la FC2pts égale à la taille du pixel. L'algorithme que nous venons de présenter a pour but de réduire l'impact des données manquantes pour permettre l'estimation rapide des statistiques sans avoir à tenir compte de ces données manquantes. La complexité de cet algorithme est de $O(N \log N)$ alors qu'elle est de $O(N^2)$ pour la FC2pts. Le temps nécessaire à l'estimation du spectre de puissance en incluant la méthode d'*inpainting* (en C++) sur le même champ et en utilisant le même ordinateur est de seulement 4 minutes. C'est 120 fois plus rapide que la FC2pts.

4.3.2 Résultats sur les cartes de cisaillement

Estimation du spectre de puissance des cartes de convergence à partir des cartes de cisaillement incomplètes

Comme dans le paragraphe précédent, nous avons réalisé une étude sur 100 cartes simulées mais, cette fois-ci les masques sont appliqués aux cartes de cisaillement. A nouveau, deux masques ont été considérés, correspondant respectivement aux relevés du CFHTLS et de Subaru (voir Fig. 2.13).

Les spectres de puissance moyens et les erreurs associées sont présentés sur les Fig. 4.13 et Fig. 4.14. Nous pouvons voir que l'écart maximum entre les deux spectres de puissance est obtenu pour une valeur de l comprise entre $[2000, 7000]$, il est d'environ 1% avec le masque du relevé CFHTLS et d'environ 0.3% pour le masque du relevé Subaru.

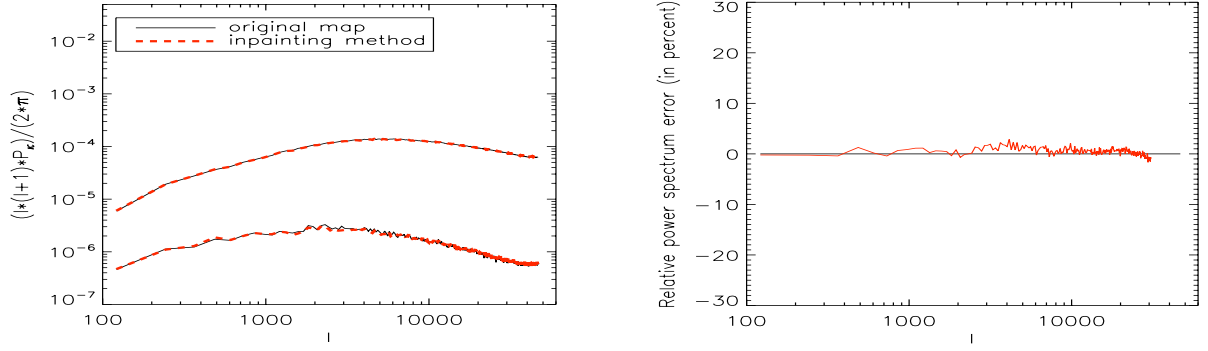


FIG. 4.11 – Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence avec le masque du relevé CFHTLS : à gauche, les deux courbes supérieures (qui sont presque superposées) correspondent au spectre de puissance moyen estimé à partir i) des cartes de convergence complètes (trait plein - noir) et ii) des cartes de convergence obtenues par *inpainting* des cartes de convergence incomplètes (ligne pointillée - rouge), et les deux courbes inférieures correspondent à la variance empirique obtenue à partir des cartes de convergence complètes (trait plein - noir) et les cartes de convergence obtenues par *inpainting* des cartes de convergence incomplètes (ligne pointillée - rouge). A droite, l'erreur relative sur l'estimation du spectre de puissance c'est-à-dire la différence normalisée entre les deux courbes supérieures à gauche.

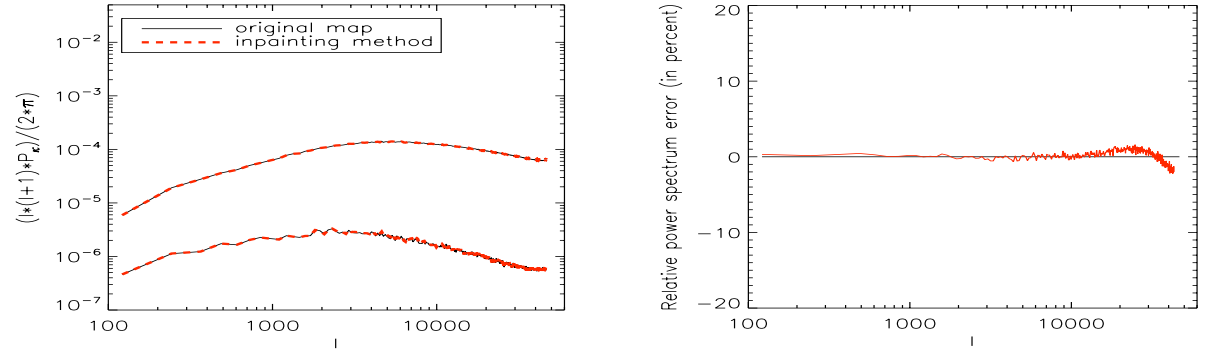


FIG. 4.12 – Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence avec le masque du relevé Subaru.

Estimation du spectre de puissance des cartes de convergence bruitées à partir des cartes de cisaillement bruitées et incomplètes

Comme nous l'avons vu §2.2.1, les données obtenues par mesure des effets de lentille gravitationnelle faibles sont bruitées d'une part à cause de l'ellipticité intrinsèque des galaxies et d'autre part à cause des erreurs sur la mesure de l'ellipticité. Ce bruit tend vers zéro si l'on moyenne sur un grand nombre de galaxies, mais en pratique cette moyenne est réalisée sur un nombre fini de galaxies dépendant du type d'observations (spatial ou au sol) et de la profondeur du relevé c'est-à-dire du temps d'exposition. Comme nous l'avons vu §4.1.3, si les données contiennent du bruit, il peut facilement être pris en compte dans notre traitement !

Une nouvelle expérience a été réalisée, toujours sur 100 cartes de cisaillement, mais cette fois-ci nous leur avons ajouté un bruit réaliste afin de simuler des observations spatiales ($n_g = 100$ galaxies/arcmin² et $\sigma_\epsilon^\gamma = 0.3$). Comme précédemment, nous avons mené l'étude sur les deux types de masques (CFHTLS et Subaru).

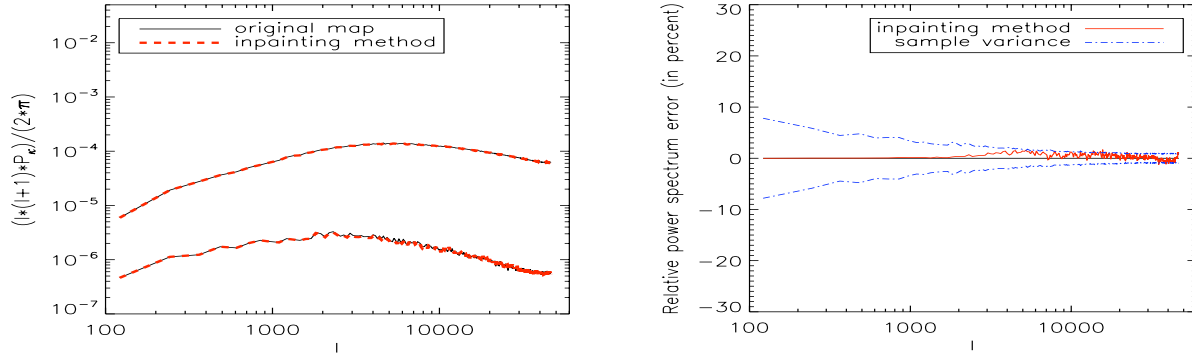


FIG. 4.13 – Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence avec le masque du relevé CFHTLS : à gauche, les deux courbes supérieures (qui sont presque superposées) correspondent au spectre de puissance moyen estimé à partir i) des cartes de convergence complètes (trait plein - noir) et ii) des cartes de convergence obtenues par *inpainting* des cartes de cisaillement incomplètes (ligne pointillée - rouge), et les deux courbes inférieures correspondent à la variance empirique obtenue à partir des cartes de convergence complètes (trait plein - noir) et les cartes de convergence obtenues par *inpainting* des cartes de cisaillement incomplètes (ligne pointillée - rouge). A droite, l'erreur relative sur l'estimation du spectre de puissance c'est-à-dire la différence normalisée entre les deux courbes supérieures à gauche. La courbe en pointillés bleue représente l'erreur sur la moyenne estimée à partir des cartes de convergence complètes.

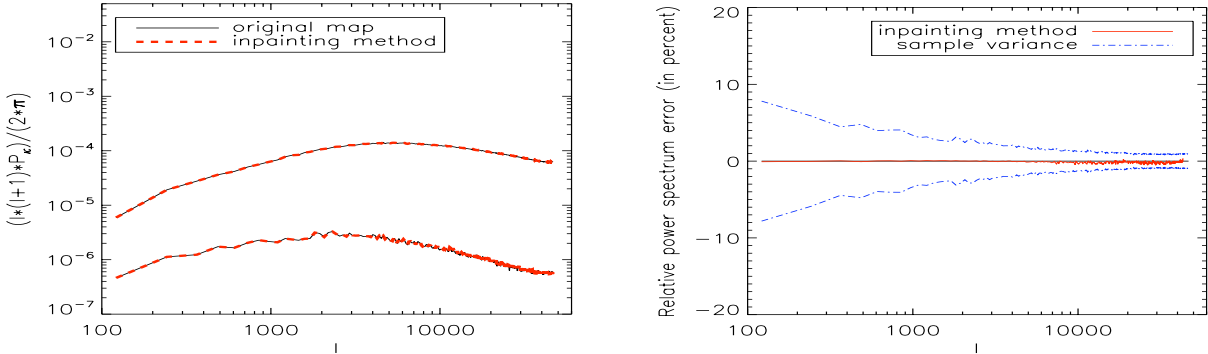


FIG. 4.14 – Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence avec le masque du relevé Subaru.

Les Fig. 4.15 et Fig. 4.16 montrent les résultats obtenus avec le masque du relevé CFHTLS et de Subaru. Nous pouvons voir que l'écart maximum entre les deux spectres de puissance à gauche est obtenu pour une valeur de l comprise entre $[25000, 40000]$, il est d'environ 1% avec le masque du relevé CFHTLS et d'environ 0.4% pour le masque du relevé Subaru. On montre ainsi que l'erreur sur l'estimation du spectre de puissance n'est pas amplifiée par la présence de bruit dans les cartes de cisaillement.

Temps de calcul : FC2pts / spectre de puissance après inpainting

Comme dans la section précédente, nous avons comparé le temps de calcul nécessaire à l'estimation de la FC2pts appliqué à des cartes de cisaillement incomplètes avec celui nécessaire à l'estimation du spectre de puissance sur des cartes de convergence obtenues par *inpainting* des cartes de cisaillement incomplètes. Sur nos simulations qui couvrent une région

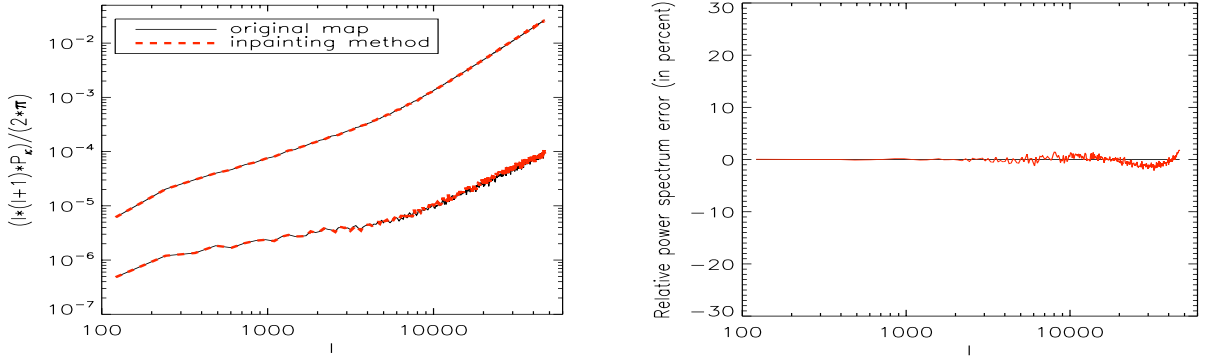


FIG. 4.15 – Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence bruitées et avec le masque du relevé CFHTLS : à gauche, les deux courbes supérieures (qui sont presque superposées) correspondent au spectre de puissance moyen estimé à partir i) des cartes de convergence bruitées et complètes (trait plein - noir) et ii) des cartes de convergence obtenues par *inpainting* des cartes de cisaillement bruitées et incomplètes (ligne pointillée - rouge), et les deux courbes inférieures correspondent à la variance empirique obtenue à partir des cartes de convergence bruitées et complètes (trait plein - noir) et les cartes de convergence obtenues par *inpainting* des cartes de cisaillement bruitées et incomplètes (ligne pointillée - rouge). A droite, l'erreur relative sur l'estimation du spectre de puissance c'est-à-dire la différence normalisée entre les deux courbes supérieures à gauche.

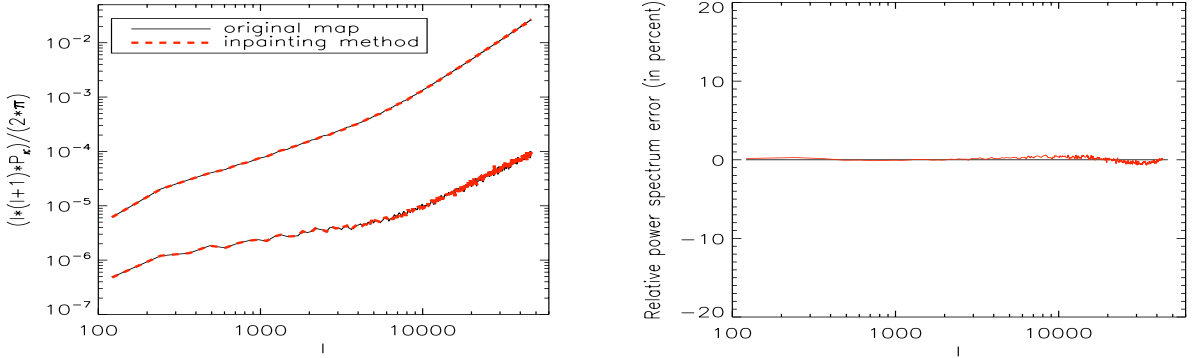


FIG. 4.16 – Estimation du spectre de puissance moyen à partir des cartes de convergence bruitées et avec le masque du relevé Subaru.

de $1.975^\circ \times 1.975^\circ$ avec 512×512 pixels, le temps nécessaire pour l'estimation du spectre de puissance à partir des cartes de cisaillement en incluant l'*inpainting* (en IDL) est de 6 minutes toujours en utilisant un PC-linux avec un processeur à 2.5 GHz. C'est un peu plus long que l'*inpainting* des cartes de convergence incomplètes car d'une part, le code est écrit en IDL et d'autre part, à chaque itération de l'*inpainting* une conversion est nécessaire pour passer des cartes de cisaillement vers les cartes de convergence et vice versa. Mais cet algorithme reste toutefois 80 fois plus rapide que la FC2pts et sa complexité est d'environ $O(N \log N)$. De plus la carte de convergence reconstruite par *inpainting* peut être re-utilisée pour calculer des statistiques d'un ordre supérieur.

Estimation du bispectre équilatéral des cartes de convergence à partir des cartes de cisaillement incomplètes

Nous avons réalisé une nouvelle étude qui consiste à estimer le bispectre équilatéral moyen sur les cartes de convergence complètes et à le comparer au bispectre estimé à partir des cartes de convergence obtenues par interpolation des cartes de cisaillement incomplètes. Nous définissons le bispectre équilatéral moyen comme suit :

$$\langle B_{\kappa}^{eq} \rangle = \frac{1}{N} \sum_m B_{\kappa^m}^{eq}. \quad (4.13)$$

Et l'erreur sur l'estimation du bispectre équilatéral $E_{B_{\kappa}^{eq}}^R$ est donnée par :

$$E_{B_{\kappa}^{eq}}^R = \frac{1}{N} \left(\frac{\sum_m B_{\kappa^m}^{eq} - \sum_m B_{\tilde{\kappa}^m}^{eq}}{\sum_m B_{\kappa^m}^{eq}} \right). \quad (4.14)$$

L'erreur sur l'estimation du bispectre équilatéral moyen pour N réalisations est défini :

$$\sigma_{\langle B_{\kappa}^{eq} \rangle} = \frac{\sigma_{B_{\kappa}^{eq}}}{\sqrt{N}}. \quad (4.15)$$

Nous avons utilisé la méthode présentée §2.4.2 pour réaliser cette expérience sur les deux types de masques (CFHTLS et Subaru). La Fig. 4.17 montre les résultats obtenus avec le masque du relevé CFHTLS et la Fig. 4.18 ceux obtenus avec le masque du relevé Subaru. L'écart maximum est obtenu avec le masque du relevé CFHTLS où l'erreur relative est d'environ 3% alors qu'elle est environ égale à 1% avec le masque du relevé Subaru. Ce résultat reste compatible avec l'erreur sur l'estimation de la moyenne pour $N = 100$ réalisations qui est représentée par la ligne en pointillés bleue. Ce résultat est très encourageant parce qu'aucune contrainte sur la solution n'a encore été utilisée pour améliorer l'estimation du bispectre.

Temps de calcul : fonction de corrélation à trois-points / bispectre équilatéral après inpainting

Nous faisons la comparaison entre le temps nécessaire pour estimer d'une part la FC3pts appliquée aux cartes de cisaillement incomplètes et d'autre part, l'estimation du bispectre dans sa configuration équilatérale appliquée sur des cartes de convergence reconstruites après *inpainting*. Notre estimateur de la FC3pts est basé sur la puissance moyenne de triangle équilatéraux dans l'espace direct et n'est pas biaisé par la présence de données manquantes. Mais son temps de calcul est très long. Même en utilisant le fait que le triangle est équilatéral plus de 8h sont nécessaires pour estimer une FC3pts sur nos simulations qui couvrent une région de $1.975^\circ \times 1.975^\circ$ avec 512×512 pixels, toujours en utilisant un PC-linux avec un processeur à 2.5 GHz. Le temps pour estimer le bispectre équilatéral incluant la méthode d'*inpainting*-MCA, le tout écrit en IDL, toujours sur le même PC-linux avec un processeur à 2.5 GHz, est seulement de 6 minutes. Ce qui est 80 fois plus rapide que la FC3pts. Et cela nécessite seulement $O(N \log N)$ opérations à comparer à l'estimation de la FC3pts dans la configuration équilatérale qui nécessite $O(N^2)$ opérations.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de l'analyse statistique des cartes de cisaillement gravitationnel en présence de données manquantes. Cette étude est présentée dans [Pires et al. \(2008b\)](#).

Les principales conclusions de cette étude sont les suivantes :

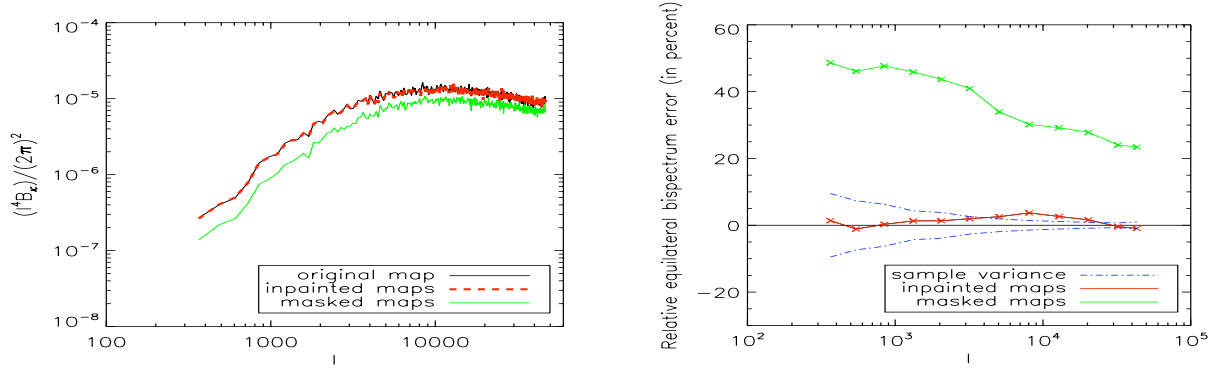


FIG. 4.17 – Estimation du bispectre équilatéral moyen avec le masque du relevé CFHTLS : à gauche, les deux courbes supérieures (qui sont presque superposées) correspondent au bispectre équilatéral moyen estimé à partir i) des cartes de convergence simulées complètes (trait plein - noir) et ii) des cartes de convergence obtenues par *inpainting* des cartes de cisaillement incomplètes (ligne pointillée - rouge) et iii) des cartes de cisaillement incomplètes (ligne pleine - verte). A droite, l'erreur relative sur le bispectre c'est-à-dire la différence normalisée entre les courbes de la figure à gauche. Chaque point de la courbe a été intégré sur un intervalle qui croît de manière logarithmique avec la valeur de ℓ . La courbe en pointillés bleu représente la variance empirique estimée à partir des cartes de convergence complètes.

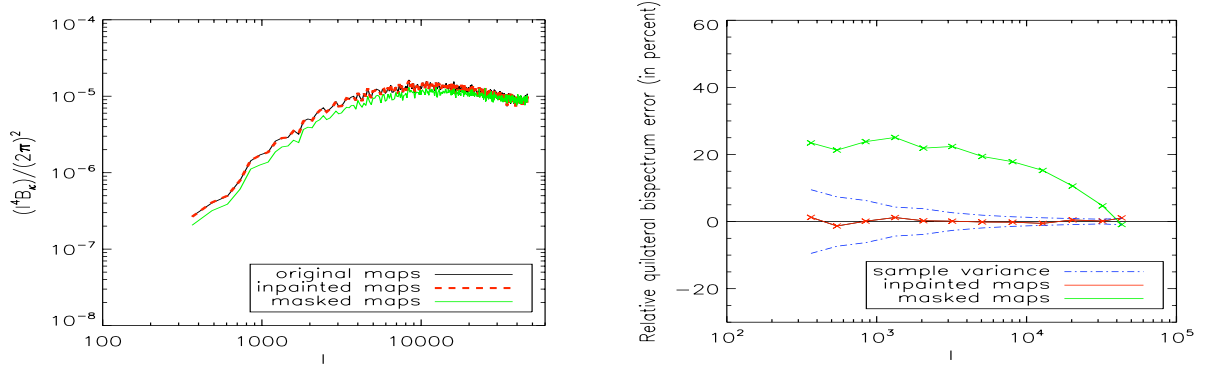


FIG. 4.18 – Estimation du bispectre équilatéral moyen avec le masque du relevé Subaru.

1. Nous avons tout d'abord présenté une nouvelle méthode pour l'interpolation d'image dans les zones masquées et ses applications à l'analyse de données de cisaillement gravitationnel. L'approche *inpainting* présentée repose fortement sur les idées de la méthode MCA (Starck et al. 2004b) et sur la notion de parcimonie du signal dans un dictionnaire donné. Cette méthode d'interpolation peut être utilisée pour d'autres types d'applications et a déjà été utilisée pour l'analyse de données du CMB pour l'interpolation dans la région du plan galactique (Abrial et al. 2007).
2. L'algorithme que nous proposons ensuite est très innovant car il ne se contente pas d'interpoler des données manquantes, il permet de résoudre le problème d'inversion de données en cisaillement gravitationnel en présence de données manquantes. L'algorithme proposé est basé sur la décomposition dans une base de cosinus (DCT) qui s'est avérée être la meilleure représentation pour les données de cisaillement gravitationnel. Cette méthode permet ainsi de reconstruire une carte de convergence complète à partir de données de cisaillement incomplètes.
3. Nous avons ensuite utilisé cet algorithme d'interpolation rapide de complexité $O(N \log N)$

pour réduire l'impact des données manquantes dans l'estimation des statistiques. Nous avons ainsi montré que notre interpolation permet d'atteindre une précision de 1% avec des masques comme celui du relevé CFHTLS et environ 0.3% pour des masques comme celui du relevé Subaru sur l'estimation du spectre de puissance cela même en présence de bruit. Et elle permet d'atteindre une précision de 3% sur l'estimation du bispectre équilatéral avec le masque du relevé CFHTLS et de 1% avec le masque du relevé Subaru.

Dans un travail futur, cette technique d'interpolation pourra être étendue à l'estimation d'autres statistiques non-Gaussiennes : au bispectre dans sa configuration locale, à des statistiques d'un ordre supérieur, à la détection d'amas... en profitant du fait que l'on a reconstruit une carte de convergence complète.

Software

Nous avons développé un code dédié à l'estimation des statistiques en présence de données manquantes. Ce code, appelé **FASTLens**, est disponible à l'adresse suivante :

<http://irfu.cea/Ast/fastlens.software.php>

Il contient toutes les méthodes développées dans ce chapitre ainsi qu'une documentation complète.

CHAPITRE 5

Filtrage des cartes de matière noire

Sommaire

5.1	La méthode multi-échelles : MRLens	102
5.1.1	Description de la méthode MRLens	102
5.1.2	Autres méthodes multi-échelles	106
5.1.3	Résultats sur des simulations	108
5.2	Application aux données COSMOS	115
5.2.1	Reconstruction de la carte de matière noire 2D	115
5.2.2	Comparaison matière noire - matière baryonique	117
5.2.3	Reconstruction de la carte de matière noire 3D	118
5.3	Application à la simulation Horizon de tout le ciel	119
5.3.1	La carte de convergence	120
5.3.2	Estimation de statistiques non-Gaussiennes	121
5.3.3	Reconstruction de la distribution de masse	123
5.4	Conclusion	124

Comme nous l'avons vu §2.2.1, pour des observations réelles, un bruit qui est lié d'une part à l'ellipticité intrinsèque des galaxies et d'autre part à l'erreur sur la mesure de l'ellipticité des galaxies se rajoute aux cartes de cisaillement observées. Ce bruit tend vers zéro, si l'on moyenne sur un grand nombre de galaxies. En pratique, cette moyenne est réalisée sur un nombre fini de galaxies qui est intrinsèquement lié au nombre de galaxies par arcmin^2 (n_g). Ce nombre est fonction du type d'observations (spatial ou au sol) et de la profondeur du relevé c'est-à-dire du temps d'exposition. En utilisant l'estimateur des moindres carrés décrit §2.2.1, nous pouvons dériver une carte de convergence. Mais cette carte de convergence est très bruitée comme le sont les cartes de cisaillement. Pour pouvoir utiliser l'effet de lentille gravitationnelle faibles afin de cartographier la distribution de matière noire, il faut parvenir à enlever le bruit des cartes de convergence. Nous avons décrit dans la section §2.3 les méthodes de filtrage qui sont utilisées habituellement.

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode de filtrage que nous avons développée, qui utilise le principe de l'Entropie multi-échelles associé à une méthode robuste de détection des coefficients significatifs : le FDR, et à un algorithme de reconstruction itératif.

Dans une première partie, nous faisons une description de cette méthode et nous testons l'efficacité de la méthode sur des simulations réalistes. Dans une deuxième partie, nous présentons l'application de la méthode à des données réelles : le champ COSMOS. Et dans

une troisième partie, nous présentons une autre application de la méthode à la première carte de cisaillement simulée de tout le ciel.

5.1 La méthode multi-échelles : MRLens

La méthode de filtrage que nous proposons dans ce chapitre utilise une approche Bayésienne décrit §2.3.2 et utilise un a priori multi-échelles. Nous allons maintenant décrire en détails cette méthode de filtrage dédiée aux cartes de convergence.

5.1.1 Description de la méthode MRLens

L'Entropie multi-échelles

La méthode d'Entropie multi-échelles (Pantin and Starck 1996) consiste à remplacer l'a priori standard de MEM (c'est-à-dire l'Entropie de Gull and Skilling) par un a priori multi-échelles. L'analyse multi-échelles s'appuie ici sur la transformation en ondelettes isotrope non décimée qui décompose une image κ de taille $N \times N$ en une somme d'images comme suit :

$$\kappa(x, y) = c_J(x, y) + \sum_{j=1}^J w_j(x, y), \quad (5.1)$$

où c_J est une version lissée de l'image originale κ et w_j représente les détails de κ à l'échelle 2^{-j} (voir Starck et al. 1998; Starck and Murtagh 2002, pour plus de détails). Ainsi, on obtient $J + 1$ bandes de taille $N \times N$ en sortie de l'algorithme. La convention utilisée pour l'indexage de ces bandes est telle que $j = 1$ correspond à l'échelle la plus fine (c'est-à-dire aux hautes fréquences).

L'Entropie est maintenant définie comme suit :

$$H(\kappa) = \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{x,y} h(w_j(x, y)). \quad (5.2)$$

Dans cette approche, l'information contenue dans une image est vue comme la somme de l'information à chaque échelle. La fonction h définit la quantité d'information relative à un coefficient en ondelettes.

Comme précédemment pour la méthode MEM, on utilise la méthode du maximum a posteriori (MAP). Si on suppose que l'on a un bruit Gaussien, la méthode de restauration par l'Entropie multi-échelles conduit à la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{Q}(\kappa) = \frac{\|\kappa_n - \kappa\|^2}{2\sigma_n^2} - \beta \sum_{j=1}^J \sum_{x,y} h_n((\mathcal{W}\kappa(x, y))_j), \quad (5.3)$$

où σ_n est l'écart-type du bruit dans κ_n , J est le nombre d'échelles, β est le paramètre de régularisation et $\mathcal{W}$ est l'opérateur de transformation en ondelettes.

Le paramètre β est calculé automatiquement avec la contrainte que l'écart-type du résidu tende vers celui du bruit. Une complète description de l'algorithme de minimisation est disponible dans Starck et al. (2001), ainsi que la méthode pour déterminer le paramètre β automatiquement.

Le choix de l'Entropie multi-échelles

Plusieurs fonctions ont été proposées pour h :

- La fonction d'Entropie multi-échelles utilisée dans [Pantin and Starck \(1996\)](#) (que nous appellerons LOG-MSE par la suite) est définie par :

$$h(w_j(x, y)) = \frac{\sigma_{n_j}}{\sigma_n^2} [w_j(x, y) - m_j - |w_j(x, y)| \log\left(\frac{|w_j(x, y)|}{K_m \sigma_{n_j}}\right)], \quad (5.4)$$

où m_j représente le modèle à l'échelle j , σ_n est l'écart-type du bruit total dans les données et σ_{n_j} est l'écart-type du bruit à l'échelle j . K_m est un paramètre fourni par l'utilisateur.

- L'Entropie peut être définie comme une fonction quadratique des coefficients en ondelettes ([Starck et al. 2001](#)) :

$$h(w_j(x, y)) = \frac{w_j^2(x, y)}{\sigma_{n_j}^2}. \quad (5.5)$$

Nous appellerons cette entropie ENERGY-MSE par la suite. La même Entropie multi-échelles a aussi été dérivée dans [Maisinger et al. \(2004\)](#).

- Dans [Starck et al. \(2001\)](#), l'Entropie est dérivée en utilisant une modélisation du bruit contenu dans les données :

$$h(w_j(x, y)) = \int_0^{|w_j(x, y)|} P_n(|w_j(x, y)| - u) \left(\frac{\partial h(v)}{\partial v} \right)_{v=u} du, \quad (5.6)$$

où $P_n(w_j(x, y))$ est la probabilité que le coefficient $w_j(x, y)$ soit du bruit : $P_n(w_j(x, y)) = \text{Prob}(W > |w_j(x, y)|)$. Pour un bruit Gaussien, on a :

$$\begin{aligned} P_n(w_j(x, y)) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_j}} \int_{|w_j(x, y)|}^{+\infty} \exp(-W^2/2\sigma_{n_j}^2) dW, \\ &= \text{erfc}\left(\frac{|w_j(x, y)|}{\sqrt{2}\sigma_{n_j}}\right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

et

$$h(w_j(x, y)) = \frac{1}{\sigma_{n_j}^2} \int_0^{|w_j(x, y)|} u \text{erfc}\left(\frac{|w_j(x, y)| - u}{\sqrt{2}\sigma_{n_j}}\right) du. \quad (5.8)$$

On donne le nom de NOISE-MSE à cette entropie.

LOG-MSE est indéterminé pour un coefficient en ondelettes égal ou proche de zéro et le modèle utilisé dans l'équation 5.4 est plus ou moins artificiel. Ce point a été soulevé dans [Maisinger et al. \(2004\)](#). Un meilleur choix pour la fonction d'Entropie pourrait être celle proposée par [Hebert and Leahy \(1989\)](#) (voir aussi la discussion plus bas, au paragraphe "la régularisation par les ondelettes") :

$$h(w_j(x, y)) \propto \log \left(1 + \frac{|w_j(x, y)|}{\sigma_{n_j}} \right). \quad (5.9)$$

ENERGY-MSE est quadratique est conduit à une forte pénalisation même pour des coefficients en ondelettes avec un rapport signal-sur-bruit élevé. On sait qu'une telle pénalisation

dégrade la résolution des pics les plus forts et par conséquent ne doit pas être utilisée pour la reconstruction de cartes de masse par cisaillement gravitationnel. NOISE-MSE est très proche de la norme l_1 (i.e. la valeur absolue des coefficients en ondelettes) quand la valeur des coefficients est grande. On sait que cette fonction produit de bons résultats pour des images lisses par morceaux (Donoho and Elad 2003). Nous avons donc choisi l'Entropie NOISE-MSE considérant que cette fonction était la plus adaptée pour la reconstruction de masse par cisaillement gravitationnel. Sur la Fig. 5.1, on peut voir la fonction de pénalisation de la norme l_1 , de ENERGY-MSE et de NOISE-MSE. La pénalisation NOISE-MSE a une forme quadratique pour les petits coefficients et est linéaire pour les grands coefficients. Plus de détails sont disponibles au paragraphe "la régularisation par les ondelettes".

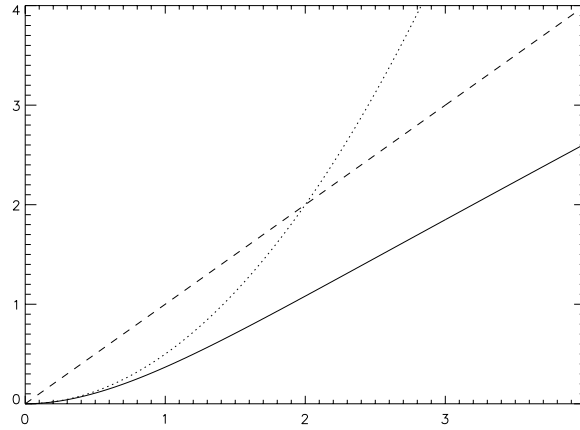


FIG. 5.1 – Fonctions de pénalisation : tirets, l_1 norm (i.e. $\phi(w) = |w|$); trait en pointillés l_2 norm $\phi(w) = \frac{w^2}{2}$ (i.e. ENERGY-MSE); trait plein, fonction d'Entropie multi-échelles (NOISE-MSE).

Détection des coefficients en ondelettes significatifs en utilisant la méthode du FDR

Dans Pantin and Starck (1996), il est suggéré de ne pas utiliser la régularisation sur les coefficients en ondelettes qui sont déjà clairement détectés, c'est-à-dire ceux qui sont significatifs. La nouvelle Entropie multi-échelles s'écrit :

$$h_n(w_j(x, y)) = \bar{M}_j(x, y)h(w_j(x, y)), \quad (5.10)$$

où $\bar{M}_j(x, y) = 1 - M_j(x, y)$, et M est le support multi-résolution (Murtagh et al. 1995) :

$$M_j(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_j(x, y) \text{ significatif} \\ 0 & \text{si } w_j(x, y) \text{ non significatif} \end{cases} \quad (5.11)$$

Ceci décrit de manière Booléenne si les données contiennent ou non de l'information à une échelle donnée j et à une position donnée (x, y) . $w_j(x, y)$ est considéré significatif lorsque la probabilité qu'il soit du bruit est faible, c'est-à-dire si $P(|W| > |w_j(x, y)|) < \epsilon$, où P est une distribution de bruit donné. Dans le cas d'un bruit Gaussien, cela revient à dire que $w_j(x, y)$ est significatif si $|w_j(x, y)| > k\sigma_{n_j}$, où σ_{n_j} est l'écart-type du bruit à l'échelle j , et k est une constante, généralement prise entre 3 et 5 (Murtagh et al. 1995). Avec cette définition, le nombre de fausses détections dépend à la fois de k et de la taille de l'image.

Une autre approche consiste à utiliser la méthode proposée par Benjamini and Hochberg (1995) qui est connue sous l'acronyme FDR (pour False Discovery Rate). Cette technique a

été récemment introduite en astrophysique par [Miller et al. \(2001\)](#); [Hopkins et al. \(2002\)](#). Elle permet de déterminer un seuil tout en contrôlant la valeur moyenne du taux de fausses détections (c-à-d le nombre de fausses détections divisé par le nombre total de détections). On dispose ainsi d'un outil efficace pour choisir un seuil en tenant compte des données. Le FDR est donné par le rapport :

$$FDR = \frac{V_{ia}}{D_a}, \quad (5.12)$$

où V_{ia} est le nombre de pixels inactifs déclarés actifs et D_a est le nombre de pixels déclarés actifs. Cette méthode exige que l'on fixe un taux de fausses détections α compris entre 0 et 1 et assure qu'en moyenne le FDR n'est pas supérieur à α :

$$E(FDR) \leq \frac{T_i}{V} \cdot \alpha \leq \alpha. \quad (5.13)$$

Le terme inconnu $\frac{T_i}{V}$ est la proportion de pixels vraiment inactifs.

La méthode FDR consiste à calculer pour chaque pixel i de la carte, sa p -value $p_i = P\{N(0, 1) > \kappa_i\}$ et à les classer de la plus petite à la plus grande $p_1, \dots, p_N$. On peut ensuite déterminer un seuil graphiquement, en traçant les p_j en fonction de $\frac{j}{N}$ et en superposant une droite d'origine 0 et de pente α . Le dernier point p_j qui tombe en dessous de cette droite permet de retrouver le seuil (voir Fig. 5.2).

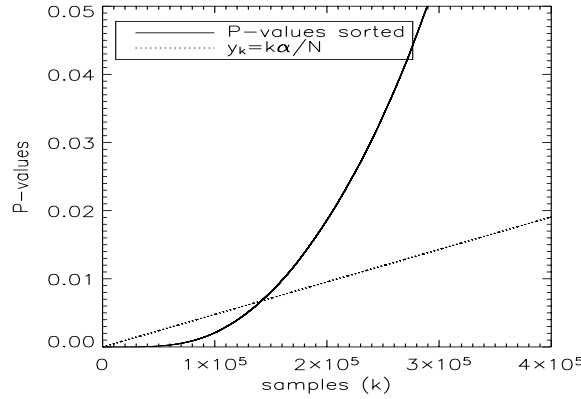


FIG. 5.2 – Comment trouver le seuil FDR graphiquement ?

Une description complète de la méthode FDR peut être trouvée dans [Miller et al. \(2001\)](#). Dans [Hopkins et al. \(2002\)](#), on a montré que le FDR surpasse les méthodes standards pour la détection de sources.

Nous avons utilisé la méthode FDR à chaque niveau de résolution j de la décomposition, nous avons ainsi dérivé un seuil de détection T_j (à partir des valeurs α_j) pour chaque échelle. Une valeur de α différente pour chaque échelle a été choisie. Pour déterminer cette valeur, nous avons utilisé la méthode des courbes de ROC (pour Receiver Operating Characteristic) ([Genovese et al. 2002](#)) afin de quantifier la qualité de la détection à une échelle donnée pour des valeurs de α différentes. Nous avons trouvé que la valeur α_j doit croître avec l'échelle en suivant la relation suivante : $\alpha_j = \alpha_0 * 2^j$ pour les observations spatiales et $\alpha_j = \alpha_0 * (1.7)^j$ pour les observations au sol où $\alpha_0 = 0.0125$ (pour une résolution telle que 1 pixel = 0.12 *arcmin*), ce qui a pour effet de faire décroître le seuil T_j avec l'échelle. Nous considérons alors un coefficient en ondelettes $w_j(x, y)$ significatif si sa valeur absolue est plus grande que T_j .

Processus itératif de reconstruction

Un processus itératif a été ajouté qui a pour but de retrouver l'information perdue pendant l'étape de reconstruction par la transformation en ondelettes inverse. En effet, une fois que l'on a seuillé les coefficients en ondelettes, la transformation en ondelettes n'est plus réversible, le processus itératif permet de pallier à ce problème.

Ce processus consiste à ajouter à la carte de convergence estimée $\tilde{\kappa}^i$, à chaque itération i , un résidu obtenu par la transformation inverse de la différence entre les coefficients en ondelettes corrigés et les coefficients en ondelettes calculés à partir de la carte de convergence reconstruite à l'itération précédente. L'algorithme converge assez vite : environ 5 itérations suffisent.

$$\tilde{\kappa}^i = \tilde{\kappa}^{i-1} + \mathcal{W}^{-1}(\bar{M}(\tilde{w} - \mathcal{W}\tilde{\kappa}^{i-1})), \quad (5.14)$$

où $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}^{-1}$ sont les opérateurs de transformation en ondelettes directe et inverse; $\bar{M} = 1 - M$, et M est le "support multi-résolution", $\tilde{w}$ sont les coefficients en ondelettes filtrés par la méthode de l'Entropie multi-échelles et $\tilde{\kappa}^i$ est la carte de convergence reconstruite à l'itération i .

Le logiciel MRLens

Nous avons développé un code basé sur la méthode que nous venons de décrire et qui est détaillé dans [Starck et al. \(2006b\)](#). Ce code appelé MRLens (pour Multi-Résolution methods for gravitational Lensing) est disponible à l'adresse suivante :

<http://irfu.cea.fr/Ast/mrlens.software.php>

Sur la Fig. 5.6, en bas à gauche on peut voir le résultat du filtrage MRLens pour des observations au sol et en bas à droite, pour des observations spatiales. La carte de convergence originale est présentée Fig. 5.4. Cette méthode utilise une Entropie multi-échelles comme a priori et limite la régularisation aux coefficients non significatifs. La méthode FDR, permet de calculer un seuil différent à chacune des échelles et de contrôler ainsi le nombre de fausses détections et le processus itératif permet de mieux reconstruire les niveaux de l'image. Une comparaison avec les autres méthodes est présentée §5.1.3.

5.1.2 Autres méthodes multi-échelles

Nous allons maintenant comparer notre méthode de filtrage MRLens avec d'autres méthodes multi-échelles existantes.

La méthode ICF-MEM multi-canaux

La méthode ICF-MEM multi-canaux introduite par [Weir \(1991, 1992\)](#) est assez similaire à l'Entropie multi-échelles. Elle consiste à considérer que l'image que l'on observe O est formée par la somme pondérée des images observées dans les différents canaux O_j , soit $O = \sum_{j=1}^{N_c} p_j O_j$ où N_c est le nombre de canaux et O_j est le résultat de la convolution entre une image cachée h_j et un filtre passe-bas C_j appelé ICF (pour Intrinsic Corrélation Function) (i.e. $O_j = C_j * h_j$). En pratique, l'ICF est une Gaussienne et l'Entropie de la méthode MEM-ICF s'écrit :

$$H_{ICF} = \sum_{j=1}^{N_c} |h_j| - m_j - |h_j| \log \left(\frac{|h_j|}{m_j} \right). \quad (5.15)$$

Un code dédié au cisaillement gravitationnel basé sur la méthode ICF-MEM appelé LensEnt2 (Marshall et al. 2002) est disponible à l'adresse suivante :

<http://www.mrao.cam.ac.uk/projects/lensent/version2/>.

Une comparaison entre le code LensEnt2 et le code MRLens est présentée un peu plus loin §5.1.3.

Dans Maisinger et al. (2004), il est dit que l'Entropie multi-échelles est simplement un cas particulier de la fonction de corrélation intrinsèque, où le noyau de convolution ICF est remplacé par une fonction ondelette.

Ceci est vrai, si on ne considère le sujet que du point de vue mathématique, mais cette vision des choses minimise complètement l'amélioration que peuvent apporter les ondelettes. Les concepts de représentation parcimonieuse (qui sont la clé du succès des ondelettes dans beaucoup d'applications), de décomposition et de reconstruction rapide, de coefficients à moyenne nulle (qui nous permet d'avoir des coefficients en ondelettes indépendants du fond et nous permet ainsi de dériver un modèle de bruit robuste) n'existent pas dans l'approche ICF-MEM. L'approche ICF-MEM nécessite d'estimer le fond avec précision ce qui parfois est une tâche très difficile et il a été montré dans Bontekoe et al. (1994) que la solution dépend fortement de cette estimation. La méthode MRLens, par contre, a seulement besoin d'une estimation de l'écart-type du bruit, ce qui est assez facile à déterminer.

Pour toutes ces raisons, nous préférons continuer à penser que la méthode de l'Entropie multi-échelles est un cas particulier des techniques générales de régularisation par les ondelettes plutôt qu'une extension de l'approche ICF.

La régularisation par les ondelettes

Plus généralement, on peut ajouter un a priori à la solution (voir l'équation 2.40) sans qu'il soit sous forme d'une Entropie. En utilisant comme a priori qu'un pixel de la carte de convergence à estimer $\tilde{\kappa}$ est fonction de ses pixels voisins la solution Bayésienne consiste à ajouter la pénalisation suivante à la solution :

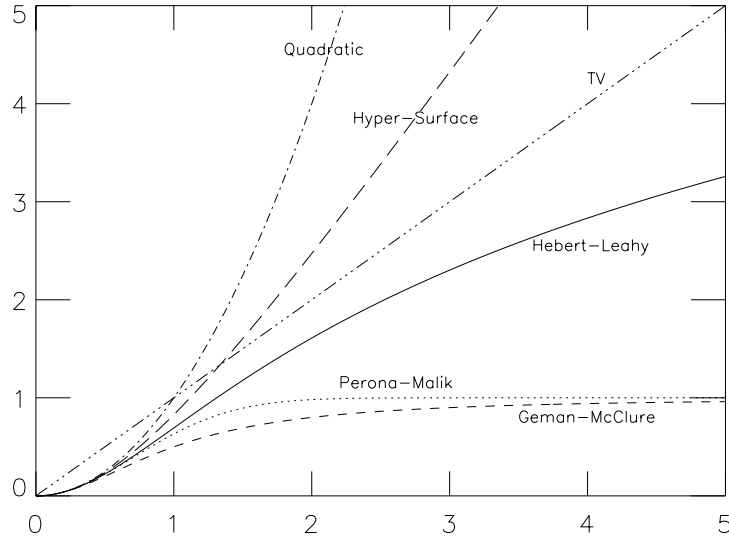
$$\mathcal{C}(\kappa) = \beta \sum_x \sum_y (\phi(\kappa(x, y) - \kappa(x, y + 1))^2 + \phi(\kappa(x, y) - \kappa(x + 1, y))^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.16)$$

La fonction ϕ , appelée *fonction potentiel*, est une fonction qui préserve les bords. Le terme $\beta \sum_x \sum_y \phi(\|\nabla \kappa(x, y)\|)$ peut aussi être interprété comme l'énergie de Gibbs d'un champ de Markov aléatoire. Généralement, les fonctions ϕ sont choisies avec une partie quadratique qui assure un bon lissage des petits gradients (Green 1990), et une partie linéaire qui annule la pénalisation pour les forts gradients (Bouman and Sauer 1993) :

1. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi'(t)}{2t} = 1$, lisse les petits gradients.
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi'(t)}{2t} = 0$, préserve les forts gradients.
3. $\frac{\phi'(t)}{2t}$ est strictement décroissante.

De telles fonctions sont souvent appelées fonctions L_2 - L_1 . Voici quelques exemples de fonctions ϕ :

1. $\phi_q(x) = x^2$: fonction quadratique.
2. $\phi_{TV}(x) = |x|$: Total Variation.
3. $\phi_2(x) = 2\sqrt{1+x^2} - 2$: Hyper-Surface (Charbonnier et al. 1997).
4. $\phi_3(x) = x^2/(1+x^2)$ (Geman and McClure 1985).
5. $\phi_4(x) = 1 - e^{-x^2}$ (Perona and Malik 1990).
6. $\phi_5(x) = \log(1+x^2)$ (Hebert and Leahy 1989).

FIG. 5.3 – Exemples de fonctions de potentiel ϕ .

Sur la Fig. 5.3 on peut voir différentes fonctions ϕ . Il a été montré que ce concept peut être généralisé dans l'espace des ondelettes, menant à un terme de pénalisation multi-échelles (Jalobeanu 2001) :

$$\mathcal{C}_w(\kappa) = \beta \sum_{j,k,l} \phi(\|(\mathcal{W}\kappa)_{j,k,l}\|_p). \quad (5.17)$$

Quand $\phi(x) = x$ et $p = 1$, on retrouve la norme l_1 des coefficients en ondelettes. Dans ce cadre, la méthode de déconvolution par l'Entropie multi-échelles est juste un cas particulier des méthodes de déconvolution avec une contrainte multi-échelles.

La Fig. 5.1 montre la fonction de pénalisation de l'Entropie multi-échelles. Les tirets correspondent à la pénalisation par la norme l_1 (i.e. $\phi(w) = |w|$), les pointillés à la pénalisation par la norme l_2 ($\phi(w) = \frac{w^2}{2}$), et la ligne continue à l'Entropie multi-échelles. On peut voir immédiatement que la fonction d'Entropie multi-échelles présente un comportement quadratique pour les petits gradients et qu'elle se rapproche de la pénalisation par la norme l_1 pour des gradients importants. Il est connu qu'une fonction de pénalisation avec un comportement l_2 - l_1 est un bon choix pour faire de la restauration d'images.

5.1.3 Résultats sur des simulations

Dans cette partie, nous comparons notre méthode MRLens avec des méthodes standards décrites §2.3 en utilisant des simulations réalistes.

Les simulations

Les résultats qui suivent ont été réalisées grâce à des cartes de convergence simulées dérivées de simulations numériques 3D (à N-corps) réalisées par Vale and White (2003). La Fig. 5.4 montre un exemple de carte de convergence simulée. Les surdensités correspondent aux halos de groupes et d'amas de galaxies. La valeur typique de κ est ainsi de l'ordre de quelques pourcents, excepté au coeur des halos massifs.

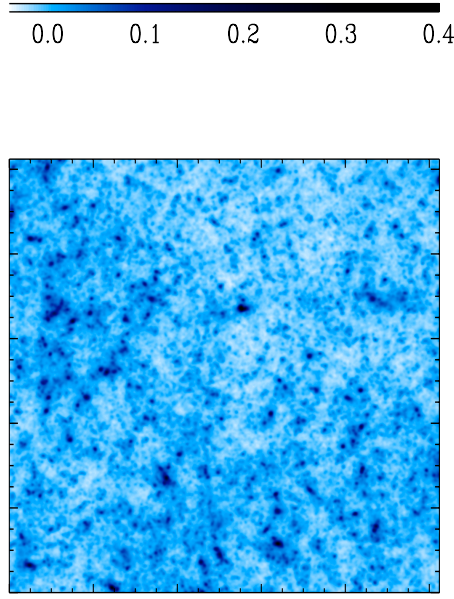


FIG. 5.4 – Carte de convergence simulée (Vale and White, 2003) pour un modèle Λ CDM qui couvre une région de $2^\circ \times 2^\circ$ avec 1024×1024 pixels réalisée à partir d’une simulation qui contient 512^3 particules pour une taille de boîte de $300h^{-1}$ Mpc.

Nous avons rajouté un bruit blanc Gaussien réaliste aux cartes de cisaillement simulées (Vale and White 2003) pour simuler des observations réalistes. Deux configurations ont été considérées :

- les observations spatiales où $n_g = 100$ gal/arcmin²
- les observations au sol où $n_g = 20$ gal/arcmin²

La densité de galaxies n_g permet d’estimer la variance du bruit σ_n .

Sur la Fig. 5.5, on peut voir une carte de convergence simulée obtenue dans le cas d’observations spatiales.

Comparaison des méthodes

Aux cartes de convergence que l’on vient de décrire, nous avons appliqué les méthodes de filtrage suivantes :

1. Filtrage Gaussien ($\sigma_G = 1$ arcmin et $\sigma_G = 2.5$ arcmin).
2. Filtrage de Wiener.
3. Méthode du Maximum d’Entropie multi-canaux (ICF-MEM) en utilisant le logiciel LensEnt2.
4. La méthode d’Entropie multi-échelles en utilisant le logiciel MRLens.

Hypothèses pour chacune des méthodes de reconstruction

1. Pour optimiser le filtre Gaussien, les valeurs $\sigma_G = 1$ arcmin et $\sigma_G = 2.5$ arcmin ont été choisies respectivement pour $n_g = 100$ gal/arcmin² et pour $n_g = 20$ gal/arcmin². Ces valeurs sont celles qui permettent de se rapprocher au mieux de la carte de convergence originale, comme on peut le voir avec la Fig. 2.5. Bien évidemment, dans le cas de vraies données, nous ne disposerons pas de cette carte originale pour ajuster la largeur du filtre Gaussien.

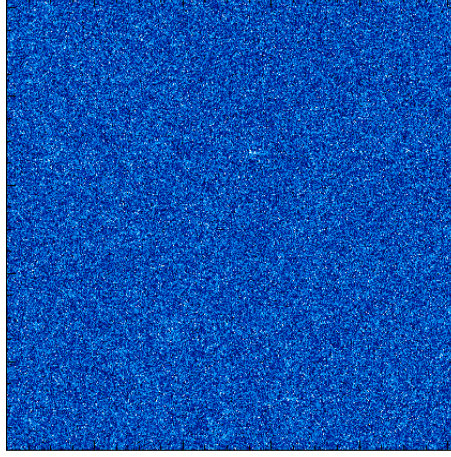


FIG. 5.5 – Carte de masse bruitée $\kappa_n^{(E)}$ avec $n_g = 100 \text{ gal/arcmin}^2$ reconstruite à partir des mesures de cisaillement, correspondant à des observations spatiales avec une erreur de mesure $\sigma_\epsilon^\gamma = 0.3 \text{ arcsec}^{-1}$. Même pour des observations spatiales qui sont censées être moins bruitées, la carte de masse non filtrée est dominée par le bruit.

2. Pour calculer le filtre de Wiener, on suppose que le bruit est additif et qu'il peut être modélisé par un bruit blanc Gaussien. En intégrant la valeur du filtre sur des anneaux concentriques de largeur d , on utilise en plus l'hypothèse que l'Univers est isotrope.
3. Pour ce qui de la méthode ICF-MEM, le code LensEnt2 n'a pas été développé pour manipuler des grandes images. Pour pouvoir faire une comparaison de cette méthode avec la méthode MRLens, nous avons sélectionné une région de $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ dans le champ. Puisque les cartes obtenues par LensEnt2 subissent une contrainte de positivité, nous avons transformé la carte d'entrée de manière à ce que le minimum de la convergence soit égal à zéro, comme les auteurs de LensEnt2 le recommandent. Pour optimiser le résultat de la méthode ICF-MEM, nous avons maximisé la valeur de l'évidence Bayésienne (voir l'équation 2.34) en faisant varier la largeur de l'ICF. Nous avons trouvé que l'évidence était maximale pour une ICF d'environ 210 arcsec pour des observations au sol et autour de 180 arcsec pour des observations spatiales.
4. Pour la méthode MRLens, on suppose que le bruit est Gaussien et il faut se donner un taux de fausses détections α pour chaque échelle j . Nous nous sommes aperçus que la valeur α_j devait croître avec l'échelle pour optimiser le résultat. Nous avons trouvé la relation suivante : $\alpha_j = \alpha_0 * 2^j$ pour les observations spatiales et $\alpha_j = \alpha_0 * (1.7)^j$ pour les observations au sol avec $\alpha_0 = 0.0125$ (pour des pixels de 0.12 arcmin). Ces relations ont été calibrées avec des données simulées cependant elles ne devraient pas trop changer pour des données réelles. Par contre la valeur de α_0 doit être ajustée en fonction de la résolution de l'image.

L'évaluation se fait ensuite en considérant les points suivants :

- i) l'inspection des images visuellement.
- ii) le calcul de l'erreur entre la carte de masse originale κ et la carte de masse reconstruite $\tilde{\kappa}$ (i.e. $E = \frac{STD(\kappa - \tilde{\kappa})}{STD(\kappa)}$).
- iii) le calcul de l'erreur pour chacune des échelles en ondelettes (i.e. $E_j = \frac{STD((\mathcal{W}\kappa)_j - (\mathcal{W}\tilde{\kappa})_j)}{STD((\mathcal{W}\kappa)_j)}$).
- iv) le calcul du spectre de puissance de l'erreur (pour MEM et pour MRLens).
- v) le temps de calcul.

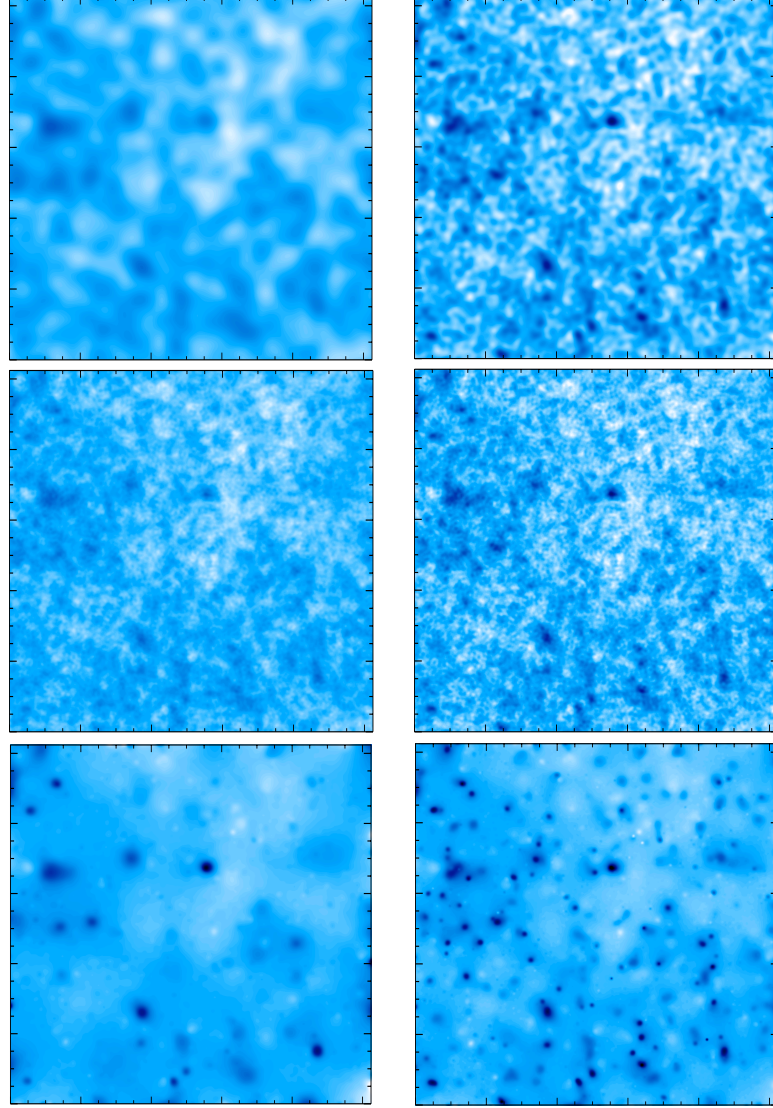
i) L'inspection des images visuellement

FIG. 5.6 – Reconstruction pour une région de $2^\circ \times 2^\circ$ pour des observations au sol (à gauche) et pour des observations spatiales (à droite). De haut en bas, filtre Gaussien, filtre de Wiener, filtrage MRLens.

Sur la Fig. 5.6, on voit une comparaison entre la méthode MRLens et deux filtres couramment utilisés : le filtre Gaussien et le filtre de Wiener que nous avons décrit plus haut. On peut voir de haut en bas les cartes de masse reconstruites avec le filtre Gaussien, avec le filtre de Wiener et par la méthode MRLens, à gauche pour des observations au sol (i.e. $n_g = 20$ gal/arcmin²) et à droite pour des observations spatiales (i.e. $n_g = 100$ gal/arcmin²). Tout d'abord, on remarque que les structures sont mieux reconstruites dans le cas d'observations spatiales. Le bruit de mesure du cisaillement étant plus faible, le bruit que l'on retrouve sur les cartes de convergence est également plus faible et peut plus facilement être filtré. Le filtre Gaussien donne un résultat plus ou moins lissé dépendant de la quantité de bruit dans l'image, comme on peut le voir Fig. 5.6 en haut. La détection des amas sur ce genre de carte est difficile et les structures grandes échelles sont plus ou moins étalées. On remarque également que le filtre de Wiener permet de bien reconstruire les structures à grandes échelles

qui appartiennent au régime linéaire du processus de formation des structures. En effet, le filtre de Wiener est optimal lorsque le signal et le bruit sont Gaussiens car comme on l'a dit précédemment, le filtre de Wiener est estimé à partir du spectre de puissance du signal et du bruit. Or le spectre de puissance permet uniquement de sonder les structures Gaussiennes qui composent le signal. Ce qui explique que les amas qui sont des structures fortement non-Gaussiennes soient moins bien reconstruits par cette méthode. Enfin, on peut voir que la méthode MRLens est la meilleure pour détecter les amas. La méthode MRLens étant basée sur une décomposition en ondelettes, elle est particulièrement bien adaptée pour représenter des structures isotropes telles que les amas. L'intensité des pics est bien reconstruite et le taux de fausses détection est conforme à la valeur du FDR que l'on s'est donnée.

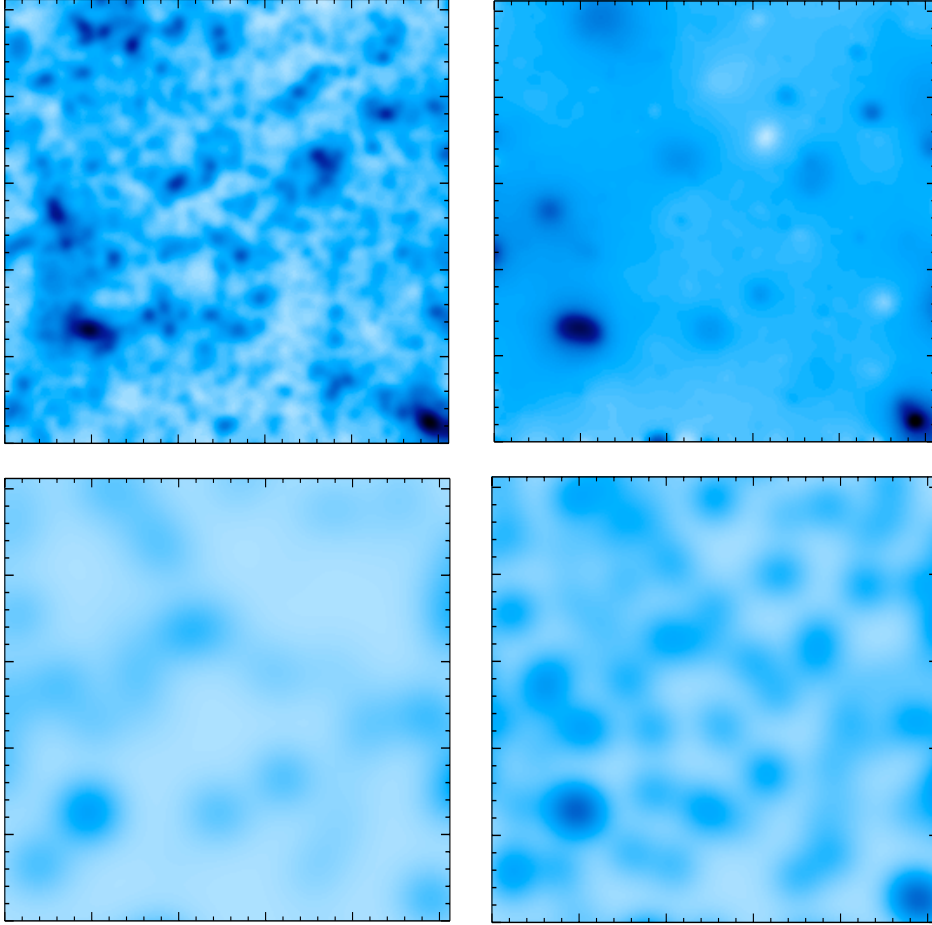


FIG. 5.7 – Sur une région de $0.5^\circ \times 0.5^\circ$, un seizième du champ original : En haut, à gauche, la carte de masse simulée, En haut, à droite, le résultat pour la méthode MRLens pour $n_g = 100$ gal/arcmin². En bas, à gauche, le résultat pour la méthode MEM-LensEnt2 pour $n_g = 20$ gal/arcmin⁻² ($ICF = 210$) et en bas, à droite pour $n_g = 100$ gal/arcmin⁻² ($ICF = 180$).

Sur la Fig. 5.7, on voit une comparaison entre la méthode MRLens et la méthode MEM-LensEnt2 sur un champ de $0.5^\circ \times 0.5^\circ$, en haut à gauche, l'image originale simulée sans bruit, en haut à droite, le filtrage par la méthode MRLens sur des observations spatiales ($n_G = 100$), en bas à gauche, le filtrage MEM-LensEnt2 sur des observations au sol et en bas à droite idem mais sur des observations spatiales. On remarque ainsi que la méthode MRLens permet de mieux reconstruire les amas que ne le permet la méthode MEM-LensEnt2. Plus d'amas sont reconstruits et leur photométrie est mieux restituée.

ii) Le calcul de l'erreur entre la carte de masse originale κ et la carte de masse reconstruite (i.e. $E = \frac{STD(\kappa - \tilde{\kappa})}{STD(\kappa)}$)

Méthode	Erreur ($n_g = 20$)	Error ($n_g = 100$)
Filtrage Gaussien ($\sigma_G = 1$ arcmin)	1.108	0.775
Filtrage Gaussien ($\sigma_G = 2.5$ arcmin)	0.9138	0.868
Filtrage de Wiener	0.888	0.770
MEM-LensEnt2	1.091	0.821
MRLens	0.888	0.746

TAB. 5.1 – Variance sur l'erreur de reconstruction pour cinq méthodes différentes.

La table 5.1 donne les écarts-types de l'erreur pour les quatre cartes de masse reconstruites par les quatre méthodes de filtrage. Elle montre que le filtre de Wiener est meilleur que le filtre Gaussien et que la méthode MRLens tant à surpasser les trois autres méthodes.

iii) Le calcul de l'erreur pour chacune des échelles en ondelettes (i.e. $E_j = \frac{STD((W\kappa)_j - (W\tilde{\kappa})_j)}{STD((W\kappa)_j)}$)

La Fig. 5.8 montre l'erreur en fonction de l'échelle (l'échelle ondelette) dans le cas d'obser-

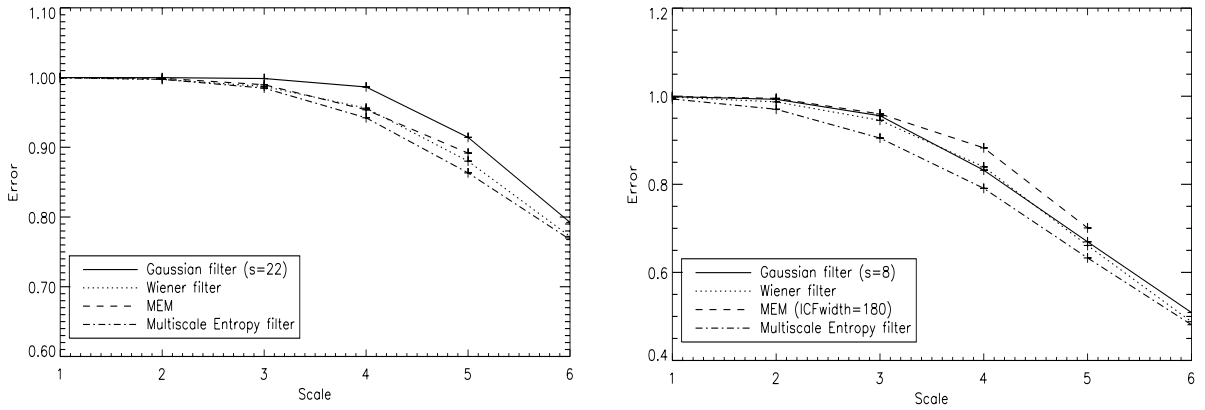


FIG. 5.8 – Variance en fonction de l'échelle pour des simulations d'observations au sol (à gauche) et des simulations d'observations spatiales (à droite).

ventions au sol (à gauche) et dans le cas d'observations spatiales (à droite) pour différents filtrages : le filtre Gaussien (trait plein), le filtre de Wiener (pointillés), le filtrage MEM-LensEnt2 (tirets) et le filtrage MRLens (tirets-pointillés). Les échelles des ondelettes de 1 à 6 correspondent respectivement aux échelles 0.12, 0.23, 0.47, 0.94, 1.87, 3.75 arcmin. On peut voir que la méthode MRLens est meilleure à toutes les échelles associées au régime non-linéaire.

iv) Le calcul du spectre de puissance de l'erreur (pour MEM et MRLens).

Sur la Fig. 5.9 nous avons tracé le logarithme du spectre de puissance pour la méthode MRLens et pour la méthode MEM-LensEnt dans le cas d'observations au sol (à gauche) et dans le cas d'observations spatiales (à droite). Le résultat est assez cohérent avec le précédent. En effet, l'erreur obtenue pour la méthode MEM devient très importante pour les petites fréquences (i.e. les échelles ondelettes les plus grandes).

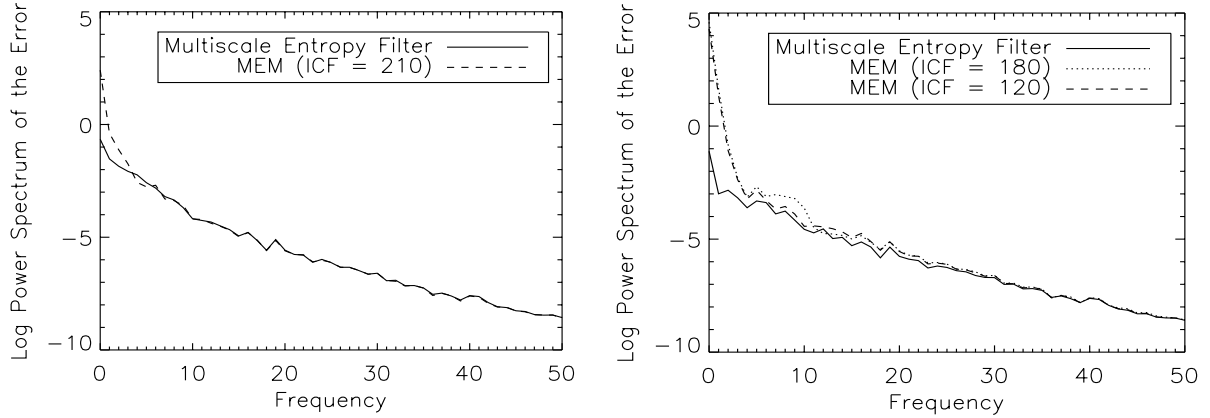


FIG. 5.9 – Log du spectre de puissance de l'erreur pour le filtrage MRLens (trait plein) et le filtrage MEM-LensEnt2 (trait en pointillés) pour les simulations d'observations au sol (à gauche) et d'observations spatiales (à droite).

v) Le temps de calcul

Pour une image de 1024×1024 pixels, le temps de calcul est de 4 minutes pour la méthode MRLens, de 26 secondes pour le filtre de Wiener et de 4 secondes pour le filtre Gaussien. Pour une image de 256×256 pixels, le temps de calcul est d'environ 60 minutes (dépendant du temps de convergence de l'algorithme) pour le filtrage MEM-LensEnt2. La méthode MEM-LensEnt2 n'a pas pu être testée sur l'image 1024×1024 car la méthode n'est pas conçue pour traiter des grands champs.

En rapport qualité-vitesse, on préférera la méthode MRLens si on cherche à reconstruire les amas et on préférera le filtre de Wiener, si on cherche à reconstruire les structures à grandes échelles.

Décomposition en modes E et B

Comme cela a été expliqué (voir l'équation 2.17), un simple test pour un grand nombre d'effets systématiques est de rechercher la présence de modes B dans les cartes de masse reconstruites par cisaillement gravitationnel. Afin de vérifier cela, nous avons simulé des cartes de masse avec des modes B.

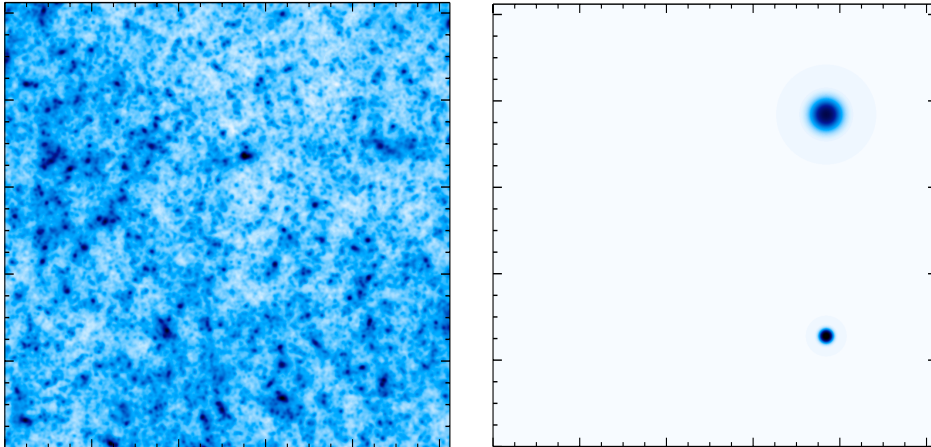


FIG. 5.10 – À gauche, les modes E de la carte de masse simulée, à droite les modes B de la carte de masse simulée

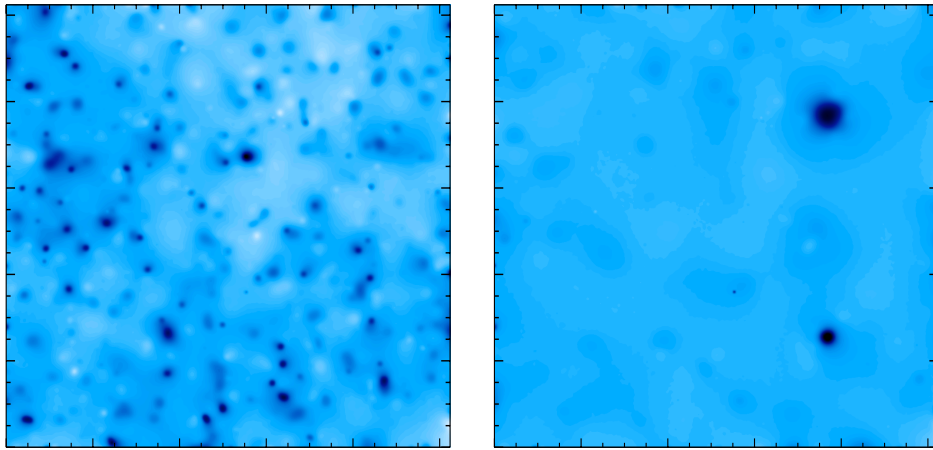


FIG. 5.11 – Modes E de la carte de masse filtrée (à gauche), Modes B de la carte de masse filtrée (à droite)

Sur la Fig. 5.10 à gauche, nous avons une carte de masse simulée ne contenant que des modes E et à droite, une carte de masse arbitraire de modes B. Comme précédemment, nous avons ajouté un bruit Gaussien réaliste pour simuler des observations spatiales. Et nous avons ainsi généré une carte de masse bruitée contenant à la fois des modes E et des modes B. En utilisant le filtrage MRLens, nous avons ainsi reconstruit les 2 composantes de la carte de masse : sur la Fig. 5.11, les modes E à gauche et les modes B à droite. On voit clairement que la séparation des modes E et des modes B par les ondelettes donne de bons résultats. En effet, les deux amas présents sur la carte de modes B ont bien été retrouvés, sans interférer avec la reconstruction des modes E.

5.2 Application aux données COSMOS

Depuis la publication de la méthode MRLens et sa mise en ligne à l'adresse : <http://irfu.cea.fr/Ast/mrlens.software.php>, la méthode MRLens a été testée sur plusieurs types de données : réelles (Massey et al. 2007b) ou simulées (Teyssier et al. 2008), en cisaillement gravitationnel faible et pour d'autres applications (Pires et al. 2006).

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus sur le champ COSMOS qui ont fait l'objet d'une publication dans la revue Nature (Massey et al. 2007b). Cette étude a été conduite en collaboration avec des chercheurs de l'Université de Caltech aux Etats-Unis. Le relevé COSMOS (COSMic evOluTion Survey) réalisé par le télescope spatial Hubble (HST pour Hubble Space Telescope) couvre une région de 1.637 degrés carrés. Il a été obtenu à partir de 575 pointés de la caméra grand champ ACS (Advanced Camera for Surveys). La qualité et la profondeur du Télescope Hubble ont permis de résoudre 71 galaxies par arcmin². Ainsi, les formes d'un demi-million de galaxies lointaines présentes sur le champ ont été mesurées pour pouvoir accéder à la distribution de matière noire présente dans cette région. La méthode RRG (Rhodes et al. 2000) a été retenue pour déconvoluer les images des galaxies en arrière-plan de leur PSF et en estimer le cisaillement.

5.2.1 Reconstruction de la carte de matière noire 2D

Une fois le champ de cisaillement mesuré, il a été converti en une carte de convergence qui correspond à la masse de la lentille projetée sur un plan perpendiculaire à la ligne de visée.

Cette conversion n'étant pas locale, la taille finie du champ introduit des défauts aux bords de la carte. D'autre part, l'erreur dans la mesure du cisaillement et l'erreur liée à l'ellipticité intrinsèque des galaxies se propagent dans les cartes de masse sous forme de bruit blanc Gaussien. La méthode MRLens décrite précédemment a été retenue pour enlever ce bruit en minimisant le nombre de fausses détections. Sur la Fig. 5.12, la carte du haut représente la distribution de matière noire reconstruite par le filtrage MRLens à partir du relevé COSMOS.

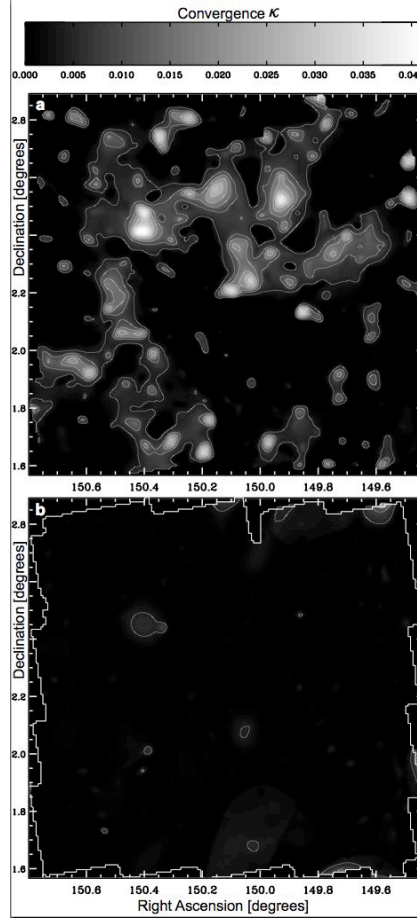


FIG. 5.12 – Distribution de matière noire couvrant une région de 2 degrés carrés correspondant au champ COSMOS. a) les "modes E" de la carte de convergence κ , qui sont proportionnels à la masse projetée le long de la ligne de visée sont représentés en niveaux de gris (sur une échelle linéaire) et grâce à des contours qui commencent à 0.4% et sont espacés de 0.5% en κ . b) La valeur absolue des "modes B" représentés avec la même échelle de couleur ainsi que les contours fournissent une réalisation du niveau de bruit dans la carte et permettent d'estimer la contamination par les effets systématiques non corrigés.

Sur cette carte, la matière semble distribuée dans trois types de régions différentes se distinguant par leur quantité de matière : Une première région qui est composée par les surdensités ou les noeuds des structures correspondant aux amas de galaxies. Ensuite les régions de vide qui contiennent très peu de galaxies. Et enfin les filaments qui correspondent à des régions autres que les amas mais qui contiennent deux fois plus de galaxies que les régions de vide. La matière noire semble ainsi reliée entre elle par un réseau de filaments, tout comme l'est la matière observable et lumineuse de l'Univers.

Grâce aux modes B de la carte de convergence κ que l'on peut voir sur la Fig. 5.12 (en bas), on a pu estimer les effets systématiques présents dans la carte de matière noire

reconstruite. Comme, on l'a vu dans la section §2.2.1, en l'absence de systématiques, la carte de modes B doit être égale à zéro. Sur la Fig. 5.12, on peut voir que les modes B sont bien cohérents avec du bruit.

5.2.2 Comparaison matière noire - matière baryonique

Dans cette étude, une comparaison entre la distribution de baryons et celle de la matière noire est réalisée (voir la Fig. 5.13). Pour cela, les effets de cisaillement gravitationnel faibles sont utilisés pour estimer la distribution totale de matière qui est dominée essentiellement par la matière noire. Rappelons que la matière baryonique représente moins de $1/6^{eme}$ de la masse totale de l'Univers. La matière baryonique est ensuite estimée à partir de la distribution de matière visible (les étoiles et les galaxies) et de la distribution du gaz. Les relevés en X profonds avec le satellite XMM-Newton permettent de mettre en évidence la concentration en gaz. Les régions les plus denses et les plus chaudes de gaz sont visibles par cette méthode. Et les observations dans le visible et dans l'InfraRouge proche permettent de mesurer d'une part, la masse des étoiles et d'autre part, la densité de galaxies.

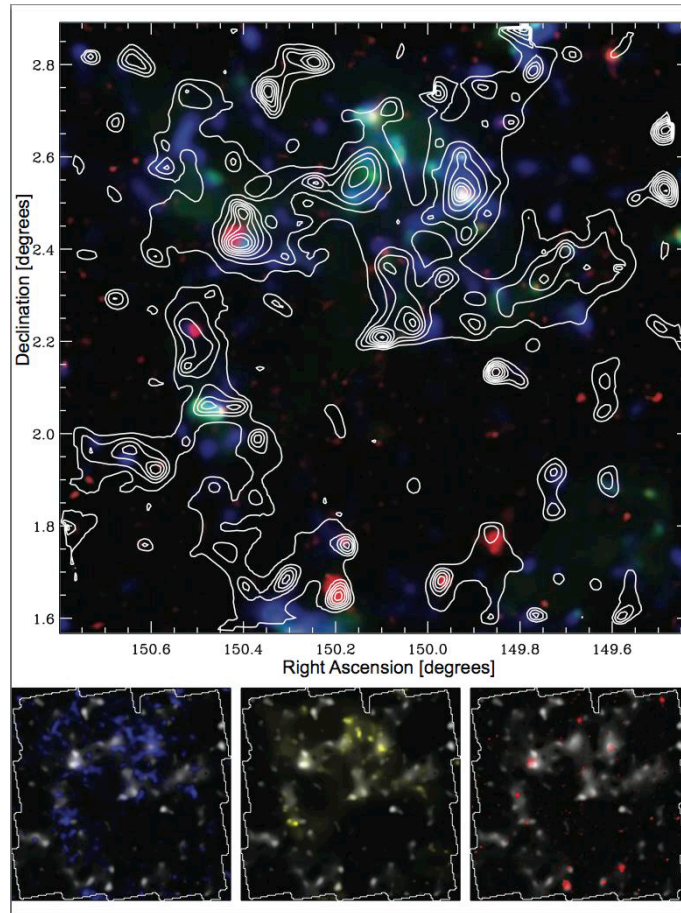


FIG. 5.13 – Comparaison de la matière baryonique et non-baryonique à grande échelle. La masse projetée totale obtenue par les effets de cisaillement gravitationnel faibles qui est dominée par la matière noire est représentée à l'aide de contour sur la figure a) et en niveaux de gris sur les figures b), c), et d). Trois traceurs indépendants de matière baryonique ont été utilisés : (i) la masse des étoiles (en bleu) vue en optique et IR proche, (ii) le nombre de galaxies (en jaune) vues en optique et IR proche et (iii) le gaz chaud (en rouge) vu en X.

Nous montrons ainsi que la distribution de matière visible ainsi que la distribution de gaz sont en parfait accord avec la distribution de matière noire révélée par les effets de lentille gravitationnelle faibles. Une comparaison statistique sur l'ensemble de la carte montre que les baryons suivent la distribution de matière noire même aux grandes échelles. Cette étude vient confirmer les résultats des simulations numériques qui prédisent que la matière noire et le gaz sont distribués selon un réseau de filaments, analogue à celui qui est observé dans la distribution des galaxies.

5.2.3 Reconstruction de la carte de matière noire 3D

Dans cette étude, nous présentons également la première carte tri-dimensionnelle de matière noire d'une fraction de l'Univers (voir la Fig. 5.14). La troisième dimension cor-

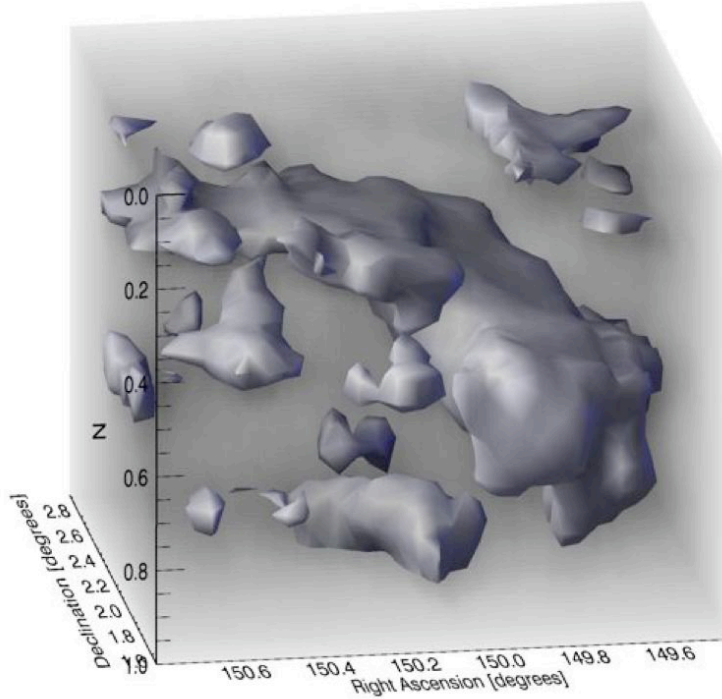


FIG. 5.14 – Reconstruction 3D de la distribution de matière noire. L'échelle de temps (décalage spectral) est fortement compressée, et le volume du relevé est vraiment un cône allongé. Un iso-contour de densité a été tracé correspondant à une densité de 1.6×10^{12} masse solaire dans un rayon de 700 kpc et $\Delta z = 0.05$. Cette valeur a été choisie arbitrairement pour faire ressortir la structure filamentaire.

respond au décalage spectral z qui représente le temps. Les cartes de matière noire 3D sont très importantes car elles permettent de bien contraindre les processus de formation des structures en permettant de voir notre Univers à des moments différents de l'histoire cosmique.

Pour pouvoir accéder à la troisième dimension, les données de Hubble ont été complétées par d'autres observations au sol (Subaru, VLT, CFHT) et dans l'espace (XMM-Newton). Les distances de dizaines de milliers de galaxies du champ COSMOS ont ainsi été estimées par la mesure de leur décalage spectral. Les valeurs de décalage spectral ont ensuite été discrétisées en séparant les galaxies d'arrière-plan en trois différents plans à $z \approx 0.3, 0.5$ et 0.7 . L'échelle

de temps est ainsi fortement compressée. D'autre part, les fonctions de sélection de chaque plan se chevauchent légèrement. Certaines structures peuvent ainsi être vues dans des plans successifs.

La méthode MRLens n'a pas pu être utilisée pour reconstruire cette carte 3D car le champ de chacun des plans était trop petit, le nombre de galaxies par plan étant divisé par 3. Mais à l'avenir, quand le champ sera plus grand on pourra facilement utiliser MRLens. On prévoit d'ailleurs de développer, une version 3D de la méthode qui traitera directement les données tri-dimensionnelles en prenant en compte l'évolution des structures dans la 3^{ème} dimension. On pourra ainsi s'intéresser à l'évolution des structures en fonction du temps.

Cette étude a montré l'importance du lancement de nouveaux observatoires spatiaux, comme le projet Euclid auquel participe le CEA, qui a pour mission d'observer la totalité du ciel. Avec de tels relevés, nous pourrions reconstruire la distribution totale de matière noire dans l'Univers et ainsi rechercher la nature exacte de la matière noire et étudier son rôle dans la formation des grandes structures de l'Univers. Nous pourrions également déterminer les propriétés de l'énergie noire qui produit aujourd'hui une accélération de l'expansion de l'Univers, et dont la nature est une des plus grandes questions de la physique fondamentale contemporaine.

5.3 Application à la simulation Horizon de tout le ciel

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus sur la première carte de cisaillement simulée de tout le ciel. L'étude que nous détaillons ici est présentée dans [Teyssier et al. \(2008\)](#).

Actuellement, en mettant en commun les quatre plus grands relevés de cisaillement gravitationnel (CFHTLS-Wide, RCS, VIRMOS-DESCART et GaBodDS), les effets de lentille gravitationnelle faibles permettent de sonder au mieux un champ d'environ 100 degrés carrés. Ces mesures ont été utilisées pour mesurer l'amplitude du spectre de puissance et pour mettre des contraintes sur certains paramètres cosmologiques ([Benjamin et al. 2007](#)). Doré et déjà, un grand nombre de nouveaux instruments sont déjà prévus afin de disposer d'une plus grande fraction du ciel à étudier, notamment la mission spatiale EUCLID qui est censée couvrir tout le ciel. Ces relevés vont nous permettre de mesurer le cisaillement à la fois aux grandes échelles où la dynamique gravitationnelle est dans le régime linéaire et aux petites échelles où la dynamique est fortement non-linéaire. En comparant ces mesures avec les prédictions théoriques de l'évolution du champ de densité, on va pouvoir placer de fortes contraintes sur les paramètres cosmologiques notamment ceux en rapport avec l'énergie noire. Aux petites échelles, la nature non-linéaire du champ de densité ne permet pas de faire des prédictions basées sur les modèles analytiques et requiert l'utilisation de simulations numériques. Des simulations à N-corps ont été utilisées pour simuler les cartes de cisaillement gravitationnel sur des zones de ciel suffisamment réduites permettant d'utiliser l'approximation en champ plat ([Jain et al. 2000](#); [White and Vale 2004](#)). Pour mieux comprendre les futurs relevés, une simulation de tout le ciel couvrant une large gamme de fréquences est apparue comme le nouvel enjeu des experts en simulation numérique. Dans cette partie, nous présentons la première carte de cisaillement de tout le ciel qui a été construite à partir d'une simulation à N-corps haute-résolution. Nous présentons également la première méthode de reconstruction de masse basée sur des techniques multi-échelles qui permet à la fois de reconstruire les grandes structures qui sont dans le régime linéaire et les petites échelles qui sont fortement non-linéaires.

5.3.1 La carte de convergence

La simulation Horizon

Pour obtenir une carte de convergence de tout le ciel, nous avons utilisé la grande simulation 3D à N-corps contenant 70 milliards de particules, générée dans le cadre du projet "Horizon". Ce projet à très forte composante numérique a pour but d'étudier la formation des galaxies dans un cadre cosmologique en utilisant au mieux les moyens de calculs existants. La méthode numérique qui a été retenue pour cette simulation est le code RAMSES (Teyssier 2002) qui est un code parallèle qui utilise la bibliothèque MPI (Message Passing Interface) pour gérer la communication entre les différents processeurs. Ce code résout les équations de l'hydrodynamique sur une grille à maillage adaptatif (AMR pour Adaptive Mesh Refinement). La structure choisie permet de raffiner chaque cellule individuellement et de façon récursive permettant ainsi d'atteindre une finesse spatiale inégalée. En partant d'une grille avec 4096^3 points ou cellules, chaque cellule AMR est ensuite individuellement raffinée si le nombre de particules par cellule est supérieur à 40. Le nombre de particules par cellule est ainsi constant variant entre 5 et 40 particules permettant ainsi de maintenir le bruit à un niveau constant. La grille AMR produite à partir du code RAMSES pour cette simulation contient plus de 140 milliards de cellules et 68.7 milliards de particules ont été utilisées pour échantillonner le champ de densité de matière noire.

Le code RAMSES permet de simuler une grande variété de modèles cosmologiques dépendant des conditions initiales. Pour la simulation Horizon, on a choisi de prendre un modèle cosmologique en concordance avec le modèle Λ CDM estimé à partir des trois ans de données du satellite WMAP (Spergel et al. 2007) chargé d'étudier le fond diffus cosmologique de l'Univers avec les valeurs suivantes pour les paramètres cosmologiques : $\Omega_m = 0.24$, $\Omega_\Lambda = 0.76$, $\Omega_b = 0.042$, $n = 0.958$, $H_0 = 73$ km/s/Mpc et $\sigma_8 = 0.77$. Le spectre de puissance utilise la fonction de transfert proposée par Eisenstein and Hu (1999) qui inclut les Oscillations Baryoniques Acoustiques (BAO). La taille de la boîte a été choisie égale à 2 Gpc/h ce qui correspond grossièrement à la distance comobile d'un objet à $z = 0.8$. La simulation couvre un volume suffisamment large pour permettre le calcul d'une carte de convergence de tout le ciel tout en permettant de résoudre des halos de la taille de la Voie lactée avec nombre de particules suffisamment grand (> 100 particules). Cet effort de calcul permet ainsi, pour la première fois de faire le lien entre les échelles proches de l'horizon cosmologique (les grandes échelles) et les échelles caractéristiques des halos de matière noire virialisés (les petites échelles).

Pour simuler un tel volume avec autant de détails, les membres du Projet Horizon ont utilisé les 6144 processeurs Intel Itanium2® du calculateur BULL NovaScale 3045 récemment installé au CCRT (Centre de Calcul, Recherche et Technologie) pour faire fonctionner à plein régime le code RAMSES. Grâce aux experts de BULL et du CCRT, ce programme a pu utiliser de façon optimale les ressources de l'ordinateur pendant près de deux mois, consommant plus de 18 Tera octets de mémoire vive et générant près de 50 Tera octets de données sur disque. Le même projet, réalisé sur un ordinateur individuel, aurait pris plus de mille ans !

Simulation de la carte de convergence

Avec la simulation Horizon, nous disposons de la distribution de matière noire sur tout le ciel pour différentes valeurs de décalage spectral (348 valeurs) comprises entre 0 et 1. Chacune des (348) tranches d'Univers, correspondant à un décalage spectral donné, a été convertie en une carte de sur-densités de tout le ciel au format HEALPix (Nside = 4096). HEALPix (Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelisation) est un algorithme qui permet de pixéliser une sphère avec, à la base, 12 pixels de même surface avec la possibilité ensuite d'augmenter la résolution de manière récursive (en divisant chaque pixel en quatre nouveaux

pixels).

Pour construire la carte de convergence à partir des 348 cartes de tout le ciel, les galaxies d'arrière-plan sont supposées être toutes situées sur un plan source correspondant à un décalage spectral de $z_s = 1$ et on utilise l'approximation de Born qui suppose que les rayons lumineux suivent des lignes droites. Dans l'article de [Van Waerbeke et al. \(2001\)](#), on montre que cette approximation introduit une erreur relative de 10% sur le coefficient d'asymétrie (le moment d'ordre 3 de la distribution) aux grandes échelles où la convergence est Gaussienne et une erreur de l'ordre de 1% pour les petites échelles qui appartiennent au régime non-linéaire de formation des structures. Cette précision a été considérée comme suffisante pour l'objet de cette étude. Une autre technique qui consiste à tracer le chemin de chaque rayon individuellement ([Jain et al. 2000](#); [White and Vale 2004](#)) permet d'avoir un résultat plus précis mais est beaucoup plus longue à mettre en oeuvre (voir [Teyssier et al. 2008](#)).

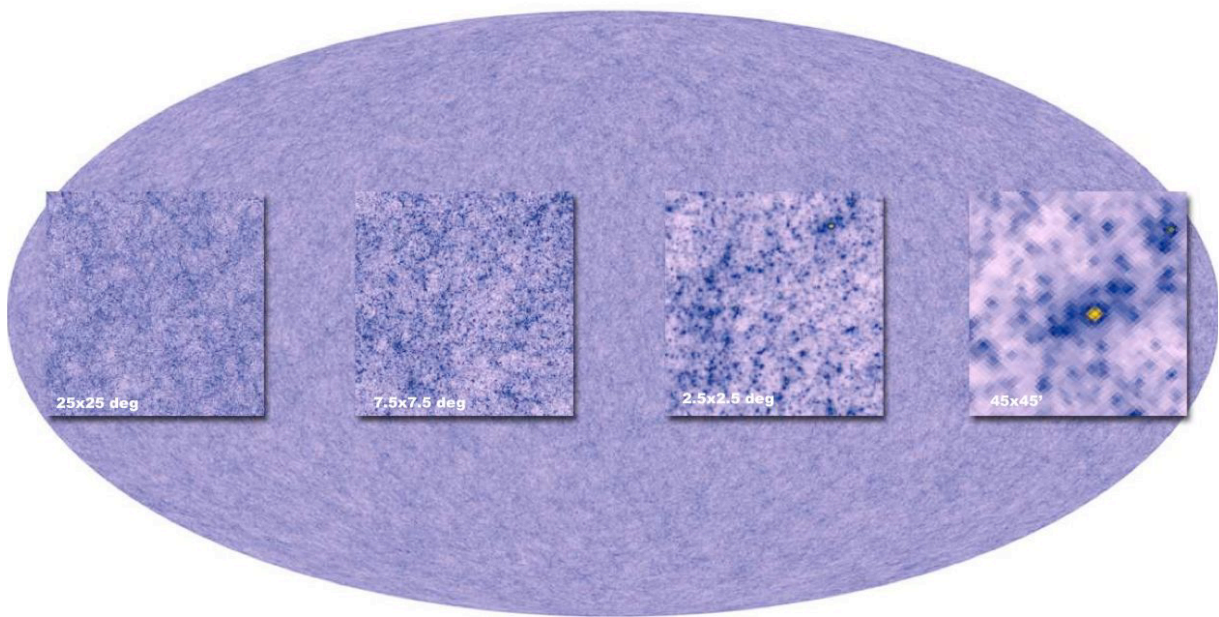


FIG. 5.15 – Carte de convergence de tout le ciel dérivée de la simulation Horizon avec une résolution de 0.74 arcmin^2 . Les petites vignettes représentent des zooms sur des régions de plus en plus petites de la carte.

Sur la Fig. 5.15 on peut visualiser la carte de convergence de tout le ciel obtenue par projection de la matière noire en utilisant l'approximation de Born, la résolution étant de 0.74 arcmin^2 . Les petites vignettes nous permettent de voir la carte de convergence à différentes échelles montrant ainsi la résolution impressionnante de cette carte. Le bruit de poisson souvent appelé "shot noise" qui est lié au nombre (restreint) de particules par cellule est négligeable pour cette simulation. En effet, sur la Fig. 5.17 qui représente le spectre de puissance de la carte de convergence, on peut voir que le bruit de poisson est bien en dessous du niveau de bruit expérimental attendu.

5.3.2 Estimation de statistiques non-Gaussiennes

Si on regarde la Fig. 5.15, aux grandes échelles la carte de convergence présente les caractéristiques d'un champ Gaussien comme c'est le cas pour la carte du fond diffus cosmologique observée par le satellite WMAP ([Spergel et al. 2007](#)) qui mesure les fluctuations primordiales de l'Univers à $z = 1100$. Par contre, aux petites échelles, le signal

est clairement dominé par la présence des halos de matière noire qui sont fortement non-Gaussien. Nous avons pu caractériser cette propriété de manière quantitative grâce à la résolution sans précédent de cette carte de tout le ciel. Pour cela, nous avons ainsi réalisé une décomposition en ondelettes en utilisant la transformation en ondelettes (isotrope) sur la sphère proposée par [Starck et al. \(2006a\)](#). Nous avons fait une décomposition en 11 échelles en ondelettes dyadiques correspondant respectivement aux multipôles (moyens) suivants $l_0 = 9000, 4500, 2250, 1125, 562, 282, 141, 71, 35, 18$. Pour chacune des images de la décomposition en ondelettes, correspondant à une échelle donnée, nous avons calculé les moments d'ordre 2, 3 et 4 c'est-à-dire respectivement la variance $\sigma^2 = \langle \kappa^2 \rangle$, le coefficient d'asymétrie normalisé $S = \langle \kappa^3 \rangle / \sigma^3$ et le coefficient d'aplatissement normalisé $K = \langle \kappa^4 \rangle / \sigma^4$. Les résultats sont présentés sur la Fig. 5.16.

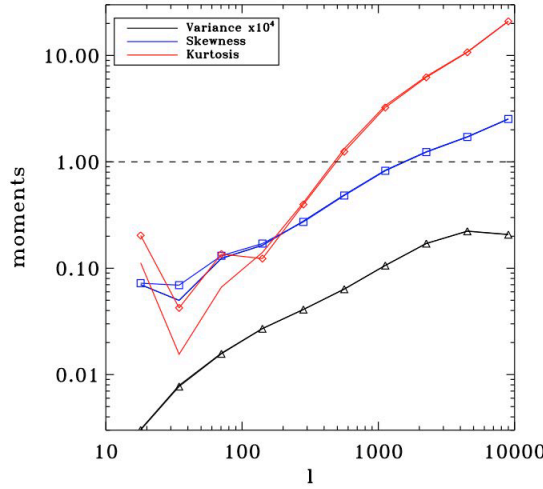


FIG. 5.16 – Moments de la convergence en fonction de l'échelle moyenne des plans en ondelettes. La variance, le coefficient d'asymétrie, et le coefficients d'aplatissement sont représentés respectivement par des courbes noire, verte et rouge. Les lignes pleines correspondent à une analyse sur tout le ciel et celles avec des symboles à une analyse plus réaliste où une partie de la carte a été masquée.

Nous pouvons voir ainsi que la variance croît avec la fréquence et sature pour des multipôles $l \geq 6000$ comme le prédit la théorie de formation des structures non-linéaires. La variance de chaque plan en ondelettes peut être considérée comme l'estimation de la puissance pour une bande du spectre de puissance comme on peut le vérifier sur la Fig. 5.17.

Sur la Fig. 5.17, nous avons également tracé le spectre de puissance linéaire pour bien voir l'échelle à partir de laquelle on rentre dans le régime non-linéaire de formation des structures : la contribution non-linéaire devient significative pour des échelles $l > 750$. Nous avons choisi de tracer les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sur la Fig. 5.16 qui sont des estimateurs plus directs de la non-Gaussianité. Nous pouvons constater que le régime non-linéaire s'installe pour des l compris entre 750 et 1500 quand les deux statistiques deviennent supérieures à 1.

Sur la Fig. 5.16, nous constatons que pour des petits l , c'est-à-dire aux grandes échelles, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sont affectés par les problèmes de variance cosmique due à la taille limitée de notre Univers. S'ajoute à cela, le fait que la statistique sur le champ de convergence ne peut pas être estimée en pratique sur tout le ciel à cause de la présence de masque sur les données. Ces masques sont dus d'une part à la présence d'étoiles très brillantes qui saturent le champ, mais aussi à la présence d'une zone d'absorption sur le

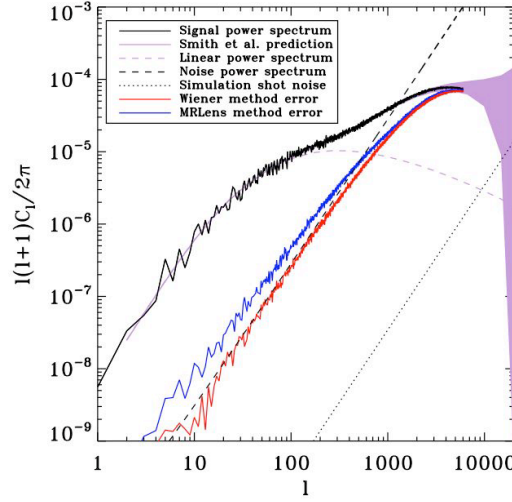


FIG. 5.17 – Le spectre de puissance angulaire de la carte de convergence simulée (trait plein noir) est comparé au modèle analytique de Smith et al (2001) (trait plein). Nous avons également tracé la prédiction faite par la théorie linéaire (trait en pointillés). Le spectre de puissance du bruit est tracé en noir (tirets). Le spectre de puissance de la carte d'erreur obtenu par le filtre de Wiener (trait plein rouge) est comparé au spectre de puissance de la carte d'erreur obtenu par la méthode MRLens (trait plein bleu).

plan galactique. Nous avons étudié l'impact de ces masques sur la précision de notre analyse statistique. Pour cela, nous avons calculé le nombre typique d'étoiles brillantes qui sature les CCD pour un relevé de cette taille. Et nous avons trouvé que 40% de la surface devait être masquée. Nous avons refait la même analyse sur la carte de tout le ciel masquée et les résultats sont représentée sur la Fig. 5.16 grâce à des lignes annotées de symboles. Nous pouvons voir que l'échelle de transition entre le régime linéaire et non-linéaire reste la même. Nous pouvons conclure que la variance liée à la taille limitée de l'échantillon imposée par les masques affecte les moments d'ordre supérieurs pour des multipôles inférieurs à $l \approx 200$.

5.3.3 Reconstruction de la distribution de masse

Nous avons ajouté un bruit blanc Gaussien réaliste à la carte de convergence de tout le ciel simulée décrite précédemment, afin de simuler les erreurs de mesure du cisaillement. Le niveau de bruit est pris égal à $\sigma_n = 0.3/\sqrt{n_g}$ avec $n_g = 40$ gal/arcmin² en accord avec les prévisions des futurs relevés de tout le ciel. Cette carte de convergence de tout le ciel réaliste peut être utilisée pour faire une analyse statistique de la distribution de matière noire comme on l'a vu dans la section précédente. Mais, elle peut également être utilisée pour construire un catalogue d'amas (essentiellement de matière noire) que l'on pourra alors comparer aux catalogues d'amas (de matière visible) reconstruit grâce à d'autres sondes telles que les rayons X, le visible, l'effet Sunyaev Zeldovich,... Ce dernier point va devenir un enjeu important dans les futures années quand les premiers relevés de tout le ciel vont être disponibles.

Cette carte de convergence réaliste va ainsi nous permettre de comparer les différentes méthodes de reconstruction de masse existantes. Dans cette étude, nous nous intéressons uniquement à la comparaison des méthodes de débruitage en supposant que la carte de convergence reconstruite à partir de la mesure du cisaillement ne contient pas de systématiques.

Une première méthode que nous avons considérée est le filtre de Wiener qui est optimal pour reconstruire des champs Gaussien. Ce filtre devrait donc être optimal pour reconstruire

les grandes structures de la carte. Comme nous l'avons décrit §2.3.1, le filtre de Wiener s'écrit : $\hat{w}(l) = \frac{S(l)}{S(l)+N(l)}$ où $S(l)$ et $N(l)$ sont respectivement les spectres de puissance du signal (sans bruit) et du bruit. Les résultats du filtre de Wiener est visible sur la Fig. 5.18. Si l'on compare le résultat avec la carte de convergence original, on remarque qu'à grandes échelles le résultat est plutôt satisfaisant par contre aux petites échelles, les amas sont assez mal reconstruits. Les structures à petites échelles sont sur-lissées et les niveaux de la carte mal retrouvés.

Afin de mieux reconstruire les amas, nous nous sommes intéressés au filtrage MRLens que nous avons présenté au chapitre V. MRLens a initialement été développé pour des cartes de convergence correspondant à une fraction du ciel très réduite pour lesquelles la non-Gaussianité était prédominante. Pour cette étude, la méthode MRLens a été étendue au cas des données sur la sphère afin de pouvoir traiter la carte de tout le ciel. La méthode MRLens a été appliquée indépendamment sur les 12 pixels de base de HEALPix couvrant la sphère, considérant chaque pixel de base comme une carte de convergence indépendante en coordonnées cartésiennes. Ce pseudo-traitement sur la sphère peut introduire des erreurs liés aux approximations que l'on fait pour passer des pixels HEALPix en coordonnées sphériques aux cartes en coordonnées cartésiennes. Dans l'étude qualitative que nous menons, ce type d'erreur est sans importance. Mais, dans l'avenir, une version de MRLens sur la sphère devra être développée pour bien traiter ce problème. Le résultat obtenue par cette version de MRLens sur la sphère est montré sur la Fig. 5.18. Pour les petites échelles, le résultat est bien meilleur que celui de Wiener : les structures sont reconstruites avec plus de précision. Par contre, aux grandes échelles, le filtre de Wiener est bien plus efficace pour retrouver la texture basse fréquence de l'image. Sur la Fig. 5.17, nous avons tracé le spectre de puissance de la carte reconstruite par le filtre de Wiener et par la méthode MRLens, montrant à nouveau qu'aux grandes échelles, le filtre de Wiener surpasse la méthode MRLens. Par contre, aux petites échelles, lorsque la contribution non-linéaire (c-à-d non-Gaussienne) devient significative pour $l \approx 1000$ (voir Fig. 5.17) la méthode MRLens surpasse le filtre de Wiener.

L'analyse que l'on vient de faire plaide pour le développement d'une méthode qui combinerait ces deux approches. Aux grandes échelles, cette méthode hybride permettrait de filtrer optimalement les grandes structures qui sont Gaussienne, en s'appuyant sur les propriétés du filtre de Wiener. Et aux petites échelles, elle permettrait de bien reconstruire les structures non-Gaussienne que sont les amas, en s'appuyant sur les caractéristiques de la méthode MRLens.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de reconstruction des cartes de matière noire présenté §2.3.

Les principales conclusions sont les suivantes :

1. Nous avons tout d'abord développé une nouvelle méthode de filtrage non-linéaire dédiée aux cartes de matière noire que nous avons appelée MRLens. Cette méthode qui est basée sur une approche Bayésienne, utilise un a priori sous forme d'une Entropie multi-échelles. Elle utilise aussi une méthode robuste de détection des coefficients significatifs : la méthode FDR ainsi qu'un algorithme de reconstruction itératif.
2. Nous avons ensuite montré, en utilisant des simulations réalistes, que cette méthode était plus performante que les autres méthodes utilisées habituellement pour filtrer les cartes de matière noire. Nous avons montré notamment que les amas de galaxies étaient mieux reconstruits par la méthode MRLens.
3. Notre méthode MRLens a ensuite été appliquée sur des vraies données : le champ COSMOS. Elle a permis ainsi de reconstruire une carte de matière noire qui est à ce

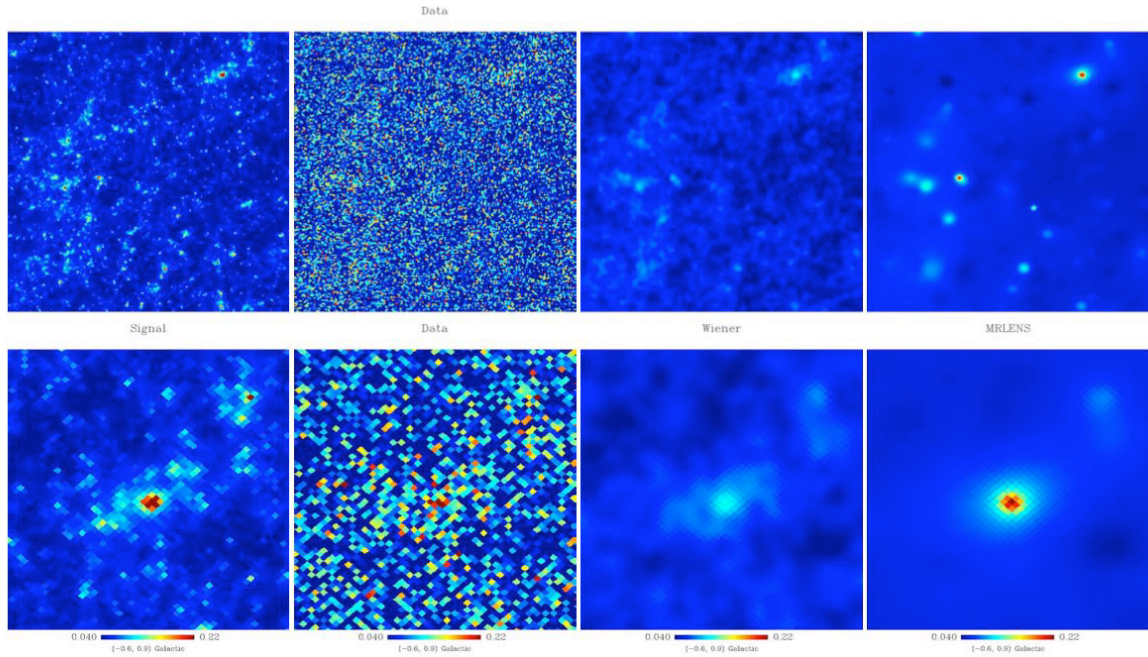


FIG. 5.18 – Reconstruction de la carte de convergence à partir du filtre de Wiener et de la méthode MRLens. Les cartes du haut correspondent à un zoom de la carte de tout le ciel représentant une zone de $2.5^\circ \times 2.5^\circ$. Les cartes du bas correspondent à des zooms des cartes du haut représentant une zone de $45' \times 45'$. De gauche à droite, nous avons la carte originale, la carte bruitée, la carte filtrée par le filtre de Wiener et la carte filtrée par MRLens

jour la plus précise. Grâce à cette carte, nous avons pu voir comment était distribuée la matière noire et nous avons pu la comparer avec la distribution de matière visible obtenue par d'autres techniques.

4. Notre méthode MRLens a finalement été appliquée sur la première carte de matière noire simulée de tout le ciel. Cette application a révélé les faiblesses de notre méthode à reconstruire les structures à grande échelle. L'étude qualitative que nous avons menée à la fin de ce chapitre plaide en la faveur d'une méthode hybride qui combinerait le filtre de Wiener et la méthode MRLens.

Software

Le code **MRLens** dédié au filtrage des cartes de matière noire ainsi qu'une documentation complète sont disponibles à l'adresse suivante :

<http://irfu.cea/Ast/mrlens.software.php>

CHAPITRE 6

Comment contraindre au mieux les paramètres cosmologiques

Sommaire

6.1	Nos outils pour la discrimination de modèles cosmologiques	128
6.1.1	Les simulations	128
6.1.2	Le taux de discrimination	129
6.1.3	Les statistiques	131
6.1.4	Les représentations	133
6.2	Analyse et résultats	134
6.2.1	Traitement du bruit	134
6.2.2	Résultats de la discrimination	136
6.3	Discussion	139
6.4	Conclusion	140

Les effets de lentille gravitationnelle faibles fournissent une méthode unique pour cartographier directement la carte de matière noire de l'Univers. La comparaison entre les simulations et les observations permet de mieux comprendre les processus de formation des structures à grande échelle et fournit un outil pour contraindre le modèle cosmologique. La majorité des études en cisaillement gravitationnel utilise les statistiques à deux points du cisaillement gravitationnel pour leur capacité à contraindre le spectre des fluctuations de densité de l'Univers tardif (Maoli et al. 2001; Refregier et al. 2002; Bacon et al. 2003; Massey et al. 2005; Dahle 2006). Mais les statistiques à deux points telles que la FC2pts ou le spectre de puissance permettent de sonder uniquement les aspects Gaussiens de la distribution, ce qui mène à des dégénérescences entre les paramètres, en particulier entre l'amplitude σ_8 des fluctuations de la matière noire dans un rayon de $8Mpc/h$ et la densité de matière de l'Univers Ω_m (voir Fig. 2.9), les deux à $z = 0$. Une discussion détaillée sur le sujet est proposée §2.4.1. Ne considérer que les structures Gaussiennes pour contraindre les paramètres cosmologiques est assez limitant car à petite échelle l'Univers tardif est fortement non-Gaussien.

De meilleures contraintes peuvent être obtenue en utilisant l'information contenue dans les cartes 3D de cisaillement gravitationnel (Bernardeau et al. 1997; Pen et al. 2003; Massey et al. 2007b). Une alternative consiste à considérer les moments d'ordre supérieur du champ de cisaillement (Takada and Jain 2003; Jarvis et al. 2004; Kilbinger and Schneider 2005; Hamana et al. 2004; Donoho and Jin 2004) qui permettent de sonder les structures non-Gaussiennes présentes à petites échelles.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la dégénérescence entre σ_8 et Ω_m en ne considérant que les effets de cisaillement gravitationnel. Nous comparons systématiquement plusieurs statistiques habituellement utilisées pour caractériser la non-Gaussianité afin de trouver celle qui permet de mieux briser cette dégénérescence qui est représentée sur la Fig. 2.9. Dans la littérature, les méthodes pour rechercher la non-Gaussianité sont basées essentiellement sur les fonctions de corrélation d'ordre supérieur (Jarvis et al. 2004; Aghanim et al. 2003; Kilbinger and Schneider 2005). Mais certains auteurs ont déjà utilisé d'autres estimateurs pour rechercher la non-gaussianité (Miyazaki et al. 2002; Bergé et al. 2008). Dans cette étude, nous faisons une comparaison entre ces statistiques et d'autres méthodes pour mesurer la non-Gaussianité afin de trouver la statistique qui permet de mieux contraindre le modèle cosmologique. Toutes ces statistiques sont estimées afin de trouver celle qui représente le mieux les non-Gaussianités.

Pour l'étude du CMB, il a été proposé d'utiliser des statistiques telles que le coefficient d'aplatissement ou le Higher Criticism dans une représentation en ondelettes afin de détecter les amas de galaxies et le coefficient d'aplatissement ou d'asymétrie dans une représentation en curvelets pour détecter des structures anisotropes telles que les cordes cosmiques (Jin et al. 2005). Les données de cisaillement gravitationnel contenant le même genre de structures, nous avons également considéré une telle approche basée sur la représentation parcimonieuse des données. L'étude qui est détaillée dans ce chapitre est présentée dans Pires et al. (2008a).

Dans une première partie, nous présentons tout d'abord les simulations que nous avons utilisées pour cette étude, nous présentons ensuite les statistiques que nous avons sélectionnées ainsi que les représentations. Nous introduisons notamment une nouvelle statistique que nous avons appelée *WPC* (pour Wavelet Peak Counting). Dans une deuxième partie, nous décrivons notre analyse et nous montrons que *WPC* est la meilleure statistique pour briser la dégénérescence entre σ_8 et Ω_m .

6.1 Nos outils pour la discrimination de modèles cosmologiques

6.1.1 Les simulations

Pour obtenir des cartes de convergence simulées, nous avons utilisé des simulations cosmologiques à N-corps générées avec le code RAMSES (Teyssier 2002). Nous avons choisi 5 modèles cosmologiques le long de la dégénérescence (σ_8, Ω_m), comme on peut le voir Fig. 6.1. Ces modèles suivent un modèle Λ CDM et les paramètres associés sont choisis dans une gamme réaliste (voir la Tableau 6.1).

Modèle	Boîte	Ω_m	Ω_Λ	h	σ_8
modèle 1	165.8	0.23	0.77	0.594	1
modèle 2	159.5	0.3	0.7	0.7	0.9
modèle 3	152.8	0.36	0.64	0.798	0.8
modèle 4	145.7	0.47	0.53	0.894	0.7
modèle 5	137.5	0.64	0.36	0.982	0.6

TAB. 6.1 – Valeur des paramètres cosmologiques pour les 5 modèles choisis le long de la dégénérescence (σ_8, Ω_m). La taille de boîte est exprimée en Mpc/h, les simulations possèdent 256^3 particules, Ω_m est le paramètre de densité de matière, Ω_Λ le paramètre de densité d'énergie noire, h est égal à $H_0/100$ où H_0 est la constante de Hubble et σ_8 l'amplitude du spectre de puissance de la matière.

En appliquant la méthode décrite §4.1.1, nous avons dérivé 100 réalisations pour chacun des 5 modèles. Sur la Fig. 6.1, on peut visualiser une réalisation de chaque modèle. A grande échelle, la distribution est plus ou moins Gaussienne. Par contre, à petite échelle, le signal est clairement dominé par des structures non-Gaussiennes : les amas de galaxies. On peut voir également que plus Ω_m/σ_8 est petit, plus le champ est structuré et inversement.

Pour des observations réelles, un bruit se rajoute à la mesure de cisaillement γ_i qui est lié d'une part à l'ellipticité intrinsèque des galaxies et d'autre part aux erreurs de mesure. Une bonne approximation, consiste à modéliser le bruit par un champ Gaussien non corrélé de variance :

$$\sigma_{noise}^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{An_g}, \quad (6.1)$$

où A est la taille du pixel en arcmin², n_g le nombre moyen de galaxies par arcmin² et σ_ϵ l'erreur sur la mesure du cisaillement. Nous fixons $\sigma_\epsilon \simeq 0.3$ et $n_g = 100$ gal/arcmin² comme ce qui est obtenu pour des relevés de cisaillement gravitationnel dans l'espace (Massey et al. 2004). Une estimation de la carte de convergence bruitée $\tilde{\kappa}_n$ est obtenue en utilisant l'estimateur des moindres carrés défini dans Starck et al. (2006b).

6.1.2 Le taux de discrimination

Dans cette étude, afin de trouver la meilleure statistique pour briser la dégénérescence entre σ_8 et Ω_m , nous comparons l'efficacité de statistiques estimées dans différentes représentations en utilisant les données simulées que nous venons de décrire. Pour cela, nous définissons un estimateur du taux de discrimination qui va nous permettre de caractériser pour une statistique donnée, la discrimination obtenue entre deux modèles. La meilleure statistique est celle qui maximise le taux de discrimination pour tous les couples de modèles.

Définition du taux de discrimination

Pour obtenir un taux de discrimination entre deux modèles m_1 et m_2 , il nous faut définir, pour chaque statistique deux seuils $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ (voir la Fig. 6.2) :

- $\mathcal{T}_1$ est défini de telle manière que si la valeur estimée de la statistique sur une carte κ_i est inférieure à $\mathcal{T}_1$, la carte κ_i est considérée comme appartenant au modèle m_1 , et inversement.
- $\mathcal{T}_2$ est défini de telle manière que si la valeur estimée de la statistique sur une carte κ_i est supérieure à $\mathcal{T}_2$, la carte κ_i est considérée comme appartenant au modèle m_2 , et inversement.

Nous avons utilisé la méthode FDR proposée par Benjamini and Hochberg (1995) et décrite §5.1.1 pour fixer les deux seuils $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. Cette méthode, très performante, permet de fixer un seuil de manière adaptative pour un taux de fausses détections donné. La Fig. 6.2, représentent les distributions obtenues avec une statistique donnée pour deux modèles différents. Chacune des régions en jaune délimitée par $\mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{T}_2$ représente les fausses détections obtenues avec le seuil $\mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{T}_2$. La méthode du FDR garantit que le taux de fausses détections est en moyenne inférieur à une valeur α qu'on doit se fixer.

Les deux seuils étant définis, nous pouvons dériver un taux de discrimination pour chacun des modèles. Le taux de discrimination est défini comme le pourcentage de cartes discriminées et pour chaque modèle il correspond à la partie de la distribution qui est hachurée sur la Fig. 6.2. Pour chaque statistique, le taux de discrimination doit être estimé pour tous les couples de modèles. Les Tableaux 6.3, 6.5 et 6.7 montrent le taux de discrimination obtenu pour trois statistiques différentes.

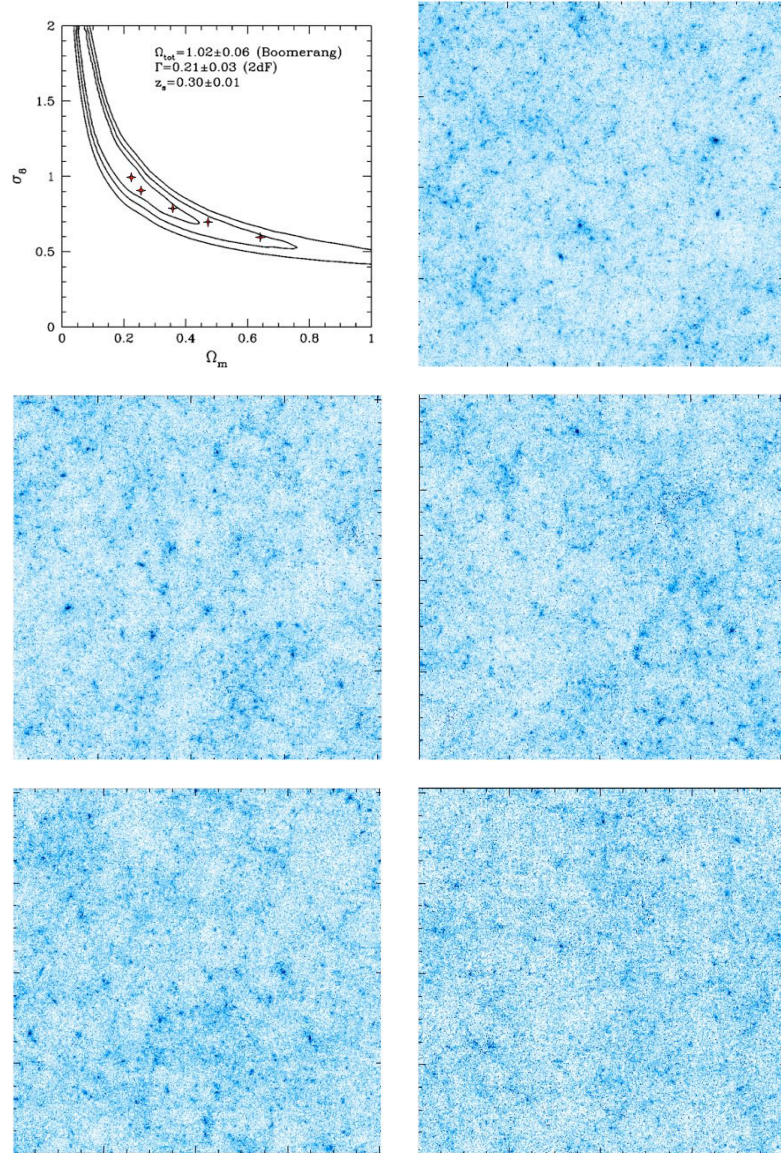


FIG. 6.1 – En haut à gauche, les cinq modèles choisis le long de la dégénérescence (σ_8, Ω_m) , en haut à droite, une réalisation de la carte de convergence du modèle 1 ($\sigma_8 = 1$ et $\Omega_m = 0.23$), Au milieu à gauche, une réalisation du modèle 2 ($\sigma_8 = 0.9$ et $\Omega_m = 0.3$), Au milieu à droite, une réalisation du modèle 3 ($\sigma_8 = 0.8$ et $\Omega_m = 0.36$), En bas à gauche, une réalisation du modèle 4 ($\sigma_8 = 0.7$ et $\Omega_m = 0.47$), et en bas à droite, une réalisation du modèle 5 ($\sigma_8 = 0.6$ et $\Omega_m = 0.64$). Le champ couvre une région de $1.975^\circ \times 1.975^\circ$ échantillonné avec 512×512 pixels.

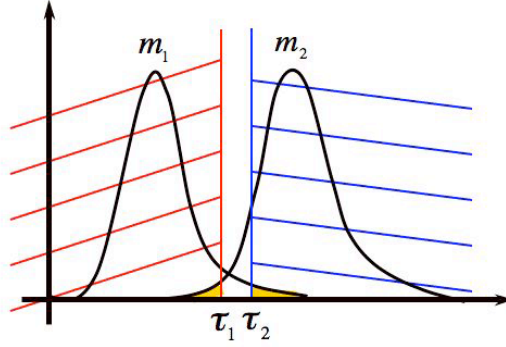


FIG. 6.2 – Taux de discrimination entre deux modèles m_1 et m_2 . La méthode FDR (pour False Discovery Rate) est utilisée pour estimer $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ en prenant un taux de fausses détection (FDR) égale à $\alpha = 0.05$.

Définition du taux de discrimination moyen

Un taux de discrimination moyen peut être estimé pour chacune des statistiques en faisant une moyenne du taux de discrimination sur tous les couples de modèles. Une discrimination parfaite est obtenue si le taux de discrimination moyen est proche de 100%. S'il est compris entre 80% et 100%, la discrimination est possible sauf pour des modèles adjacents. S'il est inférieur à 40% aucune discrimination n'est possible même pour des modèles éloignés.

Définition du taux de discrimination moyen maximum

Un taux de discrimination moyen maximum est estimé pour les statistiques qui sont estimées dans des représentations multi-échelles. Ce taux correspond à la valeur maximum obtenue pour le taux de discrimination moyen parmi toutes les échelles. Dans l'espace direct et de Fourier, le taux de discrimination moyen maximum est égal au taux de discrimination moyen.

6.1.3 Les statistiques

Le but premier de cette étude est de comparer plusieurs statistiques afin de trouver celle qui permet de mieux contraindre les paramètres cosmologiques. Comme nous l'avons vu §2.9, les statistiques à deux points ne permettent de caractériser que les aspects Gaussiens d'une distribution et aboutissent à une dégénérescence entre σ_8 et Ω_m . Nous avons donc opté pour des statistiques qui permettent de caractériser la non-Gaussianité et les processus non-linéaires de formation des structures.

- Le coefficient d'asymétrie (S) :

Le coefficient d'asymétrie (souvent appelé *skewness*) est le moment d'ordre 3 d'une distribution. Il est couramment utilisé pour mesurer la non-Gaussianité. Le coefficient d'asymétrie du champ de convergence S_κ est défini de la manière suivante :

$$S_\kappa = \sum_{i=1}^N \frac{(\kappa_i - \bar{\kappa})^3}{(N-1)\sigma^3}. \quad (6.2)$$

C'est une mesure de l'asymétrie de la distribution. Dans les cartes de convergence l'asymétrie est essentiellement due à la présence de halos de matière noire massifs. La distribution sera plus ou moins étirée vers les valeurs positives suivant l'abondance en

amas de galaxies massifs.

- Le coefficient d’aplatissement (K) :

Le coefficient d’aplatissement (souvent appelé *kurtosis*) est le moment d’ordre 4 d’une distribution, il est également souvent utilisé pour caractériser la non-Gaussianité. L’excès d’aplatissement du champ de convergence K_κ est défini de la manière suivante :

$$K_\kappa = \sum_{i=1}^N \frac{(\kappa_i - \bar{\kappa})^4}{(N-1)\sigma^4} - 3. \quad (6.3)$$

C’est une mesure de l’aplatissement de la distribution. Un excès d’aplatissement positif correspond à une distribution plus piquée qu’une Gaussienne et un excès d’aplatissement négatif à une distribution plus aplatie qu’une Gaussienne.

- Le bispectre (B_l) :

Dernièrement, on trouve un grand nombre de travaux utilisant la fonction de corrélation à trois points pour contraindre les paramètres cosmologiques. Pour des raisons de temps de calcul, nous avons utilisé son analogue dans l’espace de Fourier : le bispectre B_l que nous détaillons §2.4.1. Seule la configuration équilatérale a été considérée dans cette étude. Le code pour estimer le bispectre dans sa configuration locale sera bientôt développé et nous pourrons l’ajouter à cette étude.

- Le *Higher Criticism* (HC) :

Le *Higher Criticism* (HC) est une statistique qui a été récemment développée par [Donoho and Jin \(2004\)](#). C’est un estimateur de non-Gaussianité obtenue en cherchant la déviation maximum des p -values triées par rapport à une distribution Gaussienne. Pour définir le HC , il faut tout d’abord convertir chaque pixel i de κ en p -value. Soit $p_i = P\{N(0, 1) > \kappa_i\}$, la i ème p -value, et soit $p_{(i)}$ les p -values triées par ordre croissant. Le HC est défini comme suit :

$$HC^* = \max_i \left| \frac{\sqrt{n}[i/n - p_{(i)}]}{\sqrt{p_{(i)}(1 - p_{(i)})}} \right|. \quad (6.4)$$

Ou sous sa forme modifiée :

$$HC^+ = \max_{i: 1/n \leq p_{(i)} \leq 1-1/n} \left| \frac{\sqrt{n}[i/n - p_{(i)}]}{\sqrt{p_{(i)}(1 - p_{(i)})}} \right|. \quad (6.5)$$

Ainsi une grande valeur de HC suppose la présence de non-Gaussianité. HC permet de détecter même une faible quantité de non-Gaussianité.

- Le *Peak Counting* (PC) :

Le *Peak Counting* (PC) qui consiste à estimer le nombre de sur-densités présentes dans le champ de convergence correspond plus ou moins au nombre d’amas de galaxies que l’on peut détecter dans une fraction du ciel. Le PC tel qu’on l’a défini, permet de contraindre l’amplitude σ_8 du spectre de puissance de la matière pour un Ω_m donné (e.g. [Bahcall and Fan 1998](#)). Et le formalisme du modèle de halo permet de prédire le nombre d’amas de galaxies pour un modèle cosmologique donné (e.g. [Hamana et al. 2004](#)).

En pratique, le PC correspond au nombre de pics au dessus d'un certain seuil dans les cartes de convergence et nous utilisons le logiciel publique SExtractor ([Bertin and Arnouts 1996](#)) pour extraire les amas de galaxies des cartes de convergence filtrées et ainsi les compter. SExtractor s'avère être rapide, pratique et facile à configurer et il gère de manière efficace l'extraction des amas de galaxies. Nous utilisons la configuration sans bruit en supposant nos filtres suffisamment efficaces pour que cette hypothèse soit valide.

– Le *Wavelet Peak Counting* (WPC) :

Nous introduisons une nouvelle statistique que nous appelons *Wavelet Peak Counting* (WPC). Cette statistique est obtenue en estimant le nombre d'amas de galaxies pour chaque échelle d'une transformation en ondelettes. Cette statistique correspond plus ou moins au nombre d'amas en fonction de leur taille. Nous montrons que cette statistique est meilleure que le PC pour caractériser les processus non-linéaires de formation des structures.

Toutes ces statistiques sont estimées sur les cartes de convergence κ . En pratique, la géométrie complexe du relevé fait que les cartes de convergence κ dérivées des cartes de cisaillement γ_i possèdent la même géométrie complexe. Mais avec la méthode d'interpolation proposée dans [Pires et al. \(2008b\)](#) et présentée §4, il devient possible d'interpoler le champ de convergence κ en complet. La solution proposée permet d'interpoler les régions masquées de manière à réduire l'impact des données manquantes sur l'estimation du spectre de puissance et des statistiques d'ordre supérieur.

6.1.4 Les représentations

Le but second de cette étude est de comparer différentes représentations afin de trouver celle qui fournit la meilleure représentation pour discriminer les modèles cosmologiques. Certaines études sur les données CMB se sont déjà concentrées sur la recherche de non-Gaussianité en utilisant des méthodes multi-échelles ([Aghanim and Forni 1999](#); [Starck et al. 2004a](#)). Le champ de convergence est composé à la fois de structures isotropes telles que les amas de galaxies et de structures fortement anisotropes telles que les filaments. Ces structures peuvent être mieux représentées dans certaines représentations. Une transformation étant optimale pour représenter des structures qui ont la même forme que celle de sa fonction analysante, nous avons sélectionné les représentations suivantes :

– La transformation de Fourier (TF)

Les fonctions analysantes sont des sinusoides. La transformation de Fourier est très bonne pour représenter des structures présentant un comportement oscillatoire. Elle fournit une bonne représentation pour la texture des images.

– La transformation en ondelettes bi-orthogonale (TO)

Les fonctions analysantes sont des ondelettes légèrement anisotropes. Nous nous attendons à ce que cette transformation soit optimale pour détecter des structures isotropes et/ ou légèrement anisotropes. Une description détaillée de cette représentation est proposée §3.4.1.

– La transformation en ondelettes "à trous" (AT)

Les fonctions analysantes sont des ondelettes isotropes. Cette transformation en ondelettes est clairement adaptée à la détection de structures isotropes telles que les amas

de galaxies dans le champ de convergence. Pour une description détaillée voir §3.4.2.

- La transformation en Ridgelets (TR)
Les fonctions analysantes sont des *ridgelets* fortement anisotropes. La transformation en *ridgelets* a été développée pour traiter des images contenant des structures rectilignes. Par conséquent, elle fournit une bonne représentation pour les contours parfaitement rectilignes. Pour plus de détails voir §3.4.3.
- La transformation en Curvelets (TC)
Les fonctions analysantes sont des *curvelets* fortement anisotropes. La transformation en *curvelets* permet de bien représenter les contours ou les singularités incurvés. Plus de détails sont disponibles §3.4.4.

Notons que l'estimation d'une statistique donnée à chaque échelle d'une représentation peut être traitée comme une statistique indépendante.

6.2 Analyse et résultats

6.2.1 Traitement du bruit

Comme nous l'avons dit précédemment les cartes de convergence sont dérivées des mesures de déformation des galaxies d'arrière-plan et sont par conséquent très bruitées. Nous avons ajouté le niveau de bruit attendu à nos cartes de convergence simulées pour obtenir des cartes de convergence réalistes correspondant à des observations spatiales. La Fig. 6.3 représente une carte de convergence simulée sans bruit (à gauche) et la même carte avec du bruit (à droite) dans le cas d'observations spatiales.

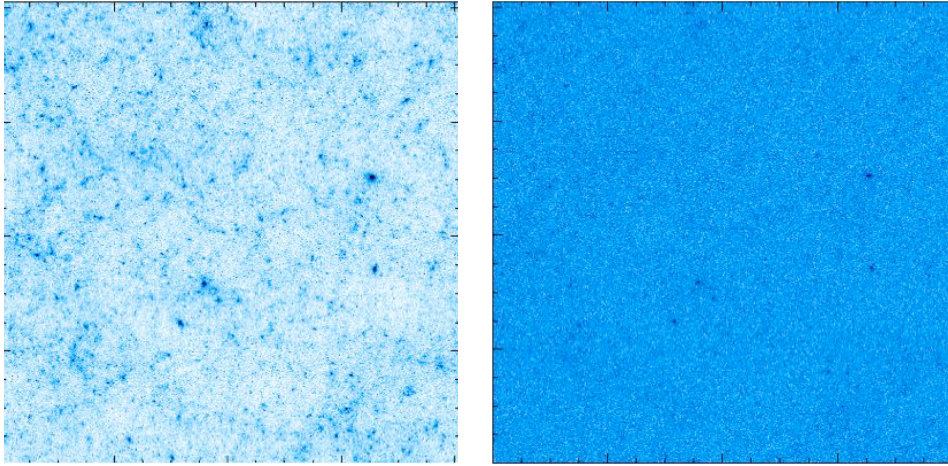


FIG. 6.3 – A gauche, carte de convergence simulée sans bruit, à droite carte de convergence simulée (avec bruit) que l'on devrait obtenir dans le cas d'observations spatiales. Le champ couvre une région de $1.975^\circ \times 1.975^\circ$.

Le bruit a un impact sur l'estimation des statistiques nécessitant sa prise en compte dans notre analyse.

Sans filtrage

Dans un premier temps, nous avons appliqué les différentes représentations directement sur les cartes de convergence bruitées et pour chaque représentation nous avons estimé les

statistiques décrites précédemment, excepté PC et WPC qui nécessite un filtrage.

Le bruit fait que les moments d'ordre 3 et 4 de la distribution tendent vers zéro. En effet, plus la carte de convergence est bruitée, plus la distribution ressemble à une distribution Gaussienne.

Filtrage Gaussien

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé un filtre Gaussien pour limiter l'impact du bruit. Le filtre Gaussien consiste à convoluer la carte de convergence bruitée $\tilde{\kappa}_N$ avec une fenêtre Gaussienne G de largeur σ_G comme nous l'avons vu §2.3.1.

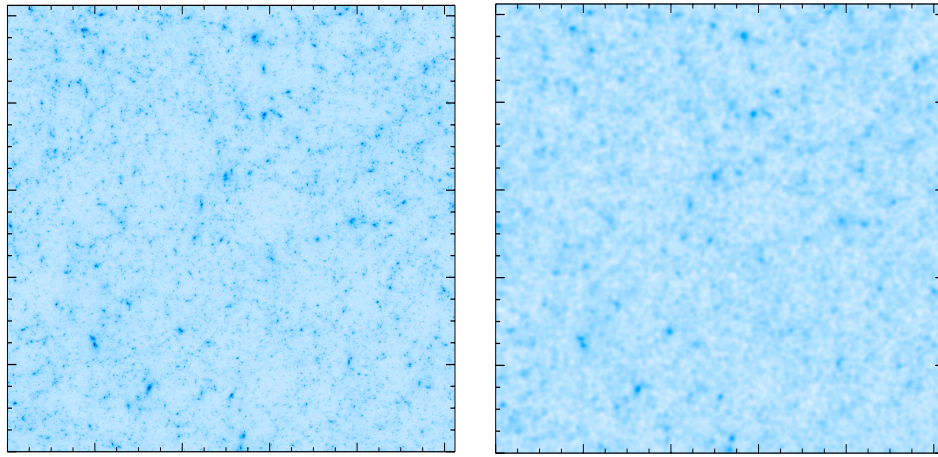


FIG. 6.4 – À gauche, carte de convergence sans bruit, et à droite carte de convergence après convolution avec un filtre Gaussien. Le champ couvre une région de $1.975^\circ \times 1.975^\circ$.

Sur la Fig. 6.4 on peut voir à gauche, la carte de convergence simulée sans bruit et à droite la même carte de convergence filtrée par une fonction Gaussienne. La qualité du filtrage dépend fortement de la valeur de σ_G . Pour nos simulations, la valeur optimale se situe autour de 0.9 arcmin (voir §2.3.1) .

Nous avons alors appliqué les différentes représentations sur les cartes de convergence filtrées et pour chaque représentation nous avons estimé les statistiques décrites précédemment.

Filtrage MRLens

Enfin, nous avons utilisé un filtrage non-linéaire dans l'espace des ondelettes pour enlever le bruit : le filtrage MRLens développé dans Starck et al. (2006b). Le logiciel MRLens que nous avons utilisé est décrit §5.1.1 et est disponible à l'adresse suivante : <http://irfu.cea.fr/Ast/mrlens.software.php>

Il a été montré dans Starck et al. (2006b) que cette méthode surpasse les méthodes standards aux petites échelles (filtre Gaussien, filtre de Wiener, filtrage MEM,...). Sur la Fig. 6.5 on peut voir à gauche, la carte de convergence simulée sans bruit et à droite la même carte de convergence après filtrage MRLens. Visuellement, on peut voir qu'un grand nombre d'amas de galaxies est bien reconstruit et que l'amplitude des pics est bien retrouvée.

Comme précédemment, on applique toutes les représentations aux cartes de convergence filtrées par la méthode MRLens et on estime ensuite pour chaque représentation les statistiques décrites précédemment. En reconstruisant essentiellement les amas de galaxies, on devine que la méthode MRLens va favoriser des statistiques telles que le PC ou WPC et sera moins efficace pour des statistiques qui se concentrent sur la texture de la carte (le fond).

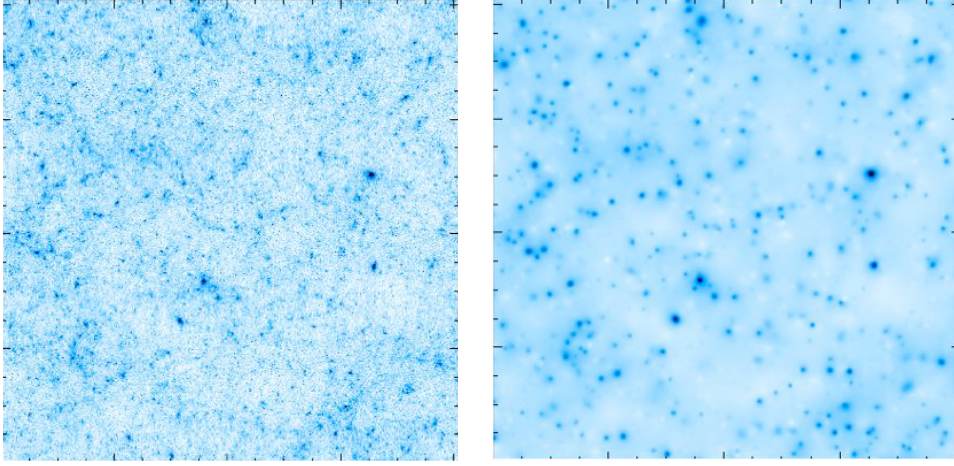


FIG. 6.5 – À gauche, carte de convergence sans bruit, et à droite carte de convergence après filtrage par la méthode MRLens. Le champ couvre une région de $1.975^\circ \times 1.975^\circ$.

6.2.2 Résultats de la discrimination

Les Tableaux 6.2, 6.4 et 6.6 présentent le taux de discrimination moyen maximum obtenu pour une statistique donnée et une représentation donnée, respectivement sur les cartes de convergence bruitées, filtrées par un filtre Gaussien et filtrées par la méthode MRLens. Comme nous l'avons dit précédemment, le taux de discrimination moyen pour le Tableau 6.3 est d'environ 40% et correspond à la valeur (1,3) du Tableau 6.2. Et, le taux de discrimination moyen pour le Tableau 6.7 est d'environ 97% et correspond à la valeur (3,5) du Tableau 6.6.

Discrimination des cartes de convergence bruitées

Le taux de discrimination moyen maximum obtenu sur les cartes de convergence bruitées est donné par le Tableau 6.2. Remarquons que PC et WPC n'ont pas été estimés sur les cartes de convergence bruitées parce que les amas de galaxies ne peuvent pas être extraits des cartes de convergence bruitées sans filtrage.

Sans filtrage, aucune discrimination ne peut être obtenue dans l'espace direct. Comme on peut le voir sur la Fig. 6.3 (à droite), le rapport signal-sur-bruit est faible et les structures non-Gaussiennes telles que les amas sont cachées par le bruit.

Les différentes représentations s'avèrent être inefficaces pour faire ressortir la non Gaussianité excepté la transformation en ondelettes "à trous" qui permet d'améliorer notablement la discrimination (voir le Tableau 6.2). La transformation en ondelettes étant optimale pour représenter les structures isotropes, elle fournit ainsi une bonne représentation des amas de galaxies et donc de la non-Gaussianité.

La meilleure statistique sur les cartes de convergence bruitées semble être le coefficient d'asymétrie estimé dans une représentation en ondelettes isotrope. Sur le Tableau 6.3, on peut voir le taux de discrimination obtenu avec le coefficient d'asymétrie dans la deuxième échelle d'une transformée en ondelettes isotrope qui correspond à l'échelle permettant d'atteindre la meilleure discrimination. Comme, nous pouvons le voir, la discrimination est possible uniquement pour les modèles les plus éloignés.

Certains groupes ont déjà utilisé ce coefficient d'asymétrie dans une *ouverture de masse* pour essayer de briser la dégénérescence $\sigma_8\text{-}\Omega_m$ (voir e.g. [Kilbinger and Schneider 2005](#); [Jarvis et al. 2004](#)). Ce traitement consiste à convoluer les cartes de convergence bruitées par des filtres dont l'échelle est variable, ce qui ressemble fortement au résultat obtenu avec une

	S	K	HC^*	HC^+	B_l	PC	WPC
Espace direct	21.0	1.6	1.8	1.9	x	x	x
TF	0.7	10.7	3.0	21.3	5.75	x	x
AT	40.5	29.3	24.9	34.0	x	x	x
TO	7.3	10.8	4.1	2.9	x	x	x
TR (block size = 16)	6.2	3.7	7.2	5.6	x	x	x
TR (block size = 32)	8.3	15.2	9.5	20.4	x	x	x
TC	1.1	4.2	2.6	4.2	x	x	x

TAB. 6.2 – Taux de discrimination moyen maximum obtenu avec des cartes de convergence bruitées avec un taux de fausses détections $\alpha = 0.05$.

représentation en ondelettes isotropes. Ils ont montré qu'en combinant cette statistique avec une statistique d'ordre deux, la dégénérescence peut être partiellement brisée, ce qui est en accord avec nos résultats.

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	x	4	55	86	99
m_2	6	x	8	52	88
m_3	23	3	x	6	77
m_4	81	7	2	x	13
m_5	99	81	12	9	x

TAB. 6.3 – Taux de discrimination obtenu (pour un taux de fausses détections $\alpha = 0.05$) avec le coefficient d'asymétrie estimé sur la transformée en ondelettes "à trous" des cartes de convergence bruitées pour une échelle ondelette correspondant à 0.5 arcmin .

Discrimination des cartes de convergence filtrées par un filtre Gaussien

Pour augmenter le rapport signal-sur-bruit, nous avons convolué les cartes de convergence bruitées par un filtre Gaussien. Le Tableau 6.4 présente les résultats obtenus sur les cartes de convergence filtrées par une fonction Gaussienne.

	S	K	HC^*	HC^+	B_l	PC	WPC
Espace direct	39.2	34.3	28.8	40.2	x	79.3	x
TF	2.2	2.2	3.8	2.9	6.75	x	x
AT	31.9	29.5	24.	38.4	x	x	79.2
TO	12.2	10.5	5.1	6.8	x	x	x
TR (block size = 16)	7.4	20.2	22.7	35.3	x	x	x
TR (block size = 32)	2.5	7.3	4.	9.1	x	x	x
TC	1.3	4.7	4.8	8.3	x	x	x

TAB. 6.4 – Taux de discrimination moyen maximum obtenu (avec un taux de fausses détections $\alpha = 0.05$) avec des cartes de convergence filtrées par un filtre Gaussien .

Après un filtrage Gaussien, le bruit est enlevé mais les structures sont plus ou moins lissées dépendant du niveau de bruit. Dans l'espace direct, la discrimination est améliorée

de manière significative. Pour ce qui est des autres représentations, le filtrage n'apporte pas grand chose. Certaines statistiques profitent un peu du débruitage et d'autres se voient un peu pénalisées par le sur-lissage des structures.

Le *PC* et le *WPC* qui peuvent maintenant être estimés sur ces cartes de convergence filtrées, fournissent de très bons résultats. Sur le Tableau 6.5, on peut voir le taux de discrimination obtenu avec le *PC* sur les cartes de convergence filtrées par filtrage Gaussien. La discrimination est maintenant possible, excepté pour les modèles adjacents.

Le pouvoir discriminant de *PC* et de *WPC* peut s'expliquer théoriquement. En considérant que la distribution de matière noire reconstruite grâce aux effets de lentille gravitationnelle est située environ à $z = 0.5$, ce qui correspond au maximum d'efficacité du cisaillement pour des galaxies d'arrière-plan situées à $z = 1$, et en supposant un modèle dont l'équation d'état de l'énergie noire est une constante, le nombre d'amas de galaxies massifs est sensible à la fois à l'amplitude des fluctuations de matière σ_8 et à la densité de matière Ω_m (voir Bahcall and Fan 1998). Si à la place de σ_8 , on considère $\sigma_8^{z=0.5}$ qui correspond à l'amplitude des fluctuations de matière dérivées du cisaillement gravitationnel, le $\sigma_8^{z=0.5}$ est maintenant une constante pour les 5 modèles cosmologiques choisis le long de la dégénérescence car les spectres de puissance sont indistinguables. Seul reste le paramètre Ω_m pour contrôler le taux de formation des structures. Ainsi, en normalisant par rapport à la distribution de matière actuelle, un petit Ω_m fait que les structures se forment plus tôt dans l'histoire cosmique et un grand Ω_m fait que les structures se forment plus tardivement. Ainsi, avec un petit Ω_m , l'abondance en amas de galaxies massifs à $z = 0.5$ est plus importante (voir Fig. 6.1 en haut à droite) que pour un grand Ω_m . Le nombre d'amas peut ainsi être utilisé pour discriminer le modèle cosmologique. L'abondance en amas massifs a déjà été utilisée pour sonder Ω_m (voir e.g. Bahcall and Fan 1998).

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	x	50	95	100	100
m_2	46	x	43	96	100
m_3	94	8	x	63	100
m_4	100	97	50	x	78
m_5	100	100	99	63	x

TAB. 6.5 – Taux de discrimination obtenu (pour un taux de fausses détections $\alpha = 0.05$) avec le *PC* estimé sur des cartes de convergence filtrées par un filtre Gaussien .

Discrimination des cartes de convergence bruitées filtrées en utilisant la méthode MRLens

Nous avons également appliqué le filtrage MRLens sur les cartes de convergence bruitées. Sur le Tableau 6.6, on peut voir le taux de discrimination moyen maximum obtenu avec les cartes de convergence filtrées par la méthode MRLens.

On remarque que le taux de discrimination moyen est considérablement améliorée quelle que soit la statistique. En effet, le filtrage MRLens facilite les statistiques non-Gaussiennes en reconstruisant essentiellement les amas de galaxies comme on peut le voir sur la Fig. 6.5.

On remarque également, comme précédemment, que la transformation en ondelettes "à trous" reste la meilleure représentation. Une statistique estimée dans cet espace des ondelettes isotropes possède un meilleur taux de discrimination moyen.

	S	K	HC^*	HC^+	B_l	PC	WPC
Espace direct	65.2	54.5	72.9	8.4	x	93.2	x
TF	3.2	3.4	30.0	38.4	9.95	x	x
AT	81.7	68.1	74.8	74.1	x	x	97.3
TO	52.2	67.3	29.7	65.0	x	x	x
TR (block size = 16)	45.1	54.5	77.1	37.2	x	x	x
TR (block size = 32)	61.5	52.6	70.3	69.0	x	x	x
TC	25.	65.5	68.8	63.3	x	x	x

TAB. 6.6 – Taux de discrimination moyen maximum obtenu avec des cartes de convergence filtrées par la méthode MRLens avec un taux de fausses détections $\alpha = 0.05$.

Le taux de discrimination moyen maximum est obtenu avec WPC à la troisième échelle d’une transformée en ondelettes isotropes (voir le Tableau 6.7), sûrement favorisé par le filtrage MRLens qui reconstruit essentiellement les amas de galaxies. Cette statistique permet de discriminer presque parfaitement entre les 5 modèles cosmologiques, même pour les modèles adjacents. Notons toutefois qu’après un filtrage par la méthode MRLens d’autres statistiques permettent également d’atteindre un bon niveau de discrimination si on compare aux résultats obtenus avec les cartes de convergence filtrées par une fonction Gaussienne.

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	x	86	100	100	100
m_2	87	x	94	100	100
m_3	100	92	x	94	100
m_4	100	100	93	x	99
m_5	100	100	100	100	x

TAB. 6.7 – Taux de discrimination obtenu (avec un taux de fausses détections $\alpha = 0.05$) avec WPC estimé sur la transformée en ondelettes ”à trous” des cartes de convergence, filtrées avec la méthode MRLens, pour une échelle ondelette correspondant à 1 *arcmin*.

La comparaison de ces résultats avec ceux obtenus sur les cartes de convergence bruitées avec le coefficient d’asymétrie dans la deuxième échelle d’une représentation en ondelettes isotropes (voir le Tableau 6.3) montre que la précision sur σ_8 et Ω_m est fortement améliorée en utilisant WPC sur les cartes de convergence filtrées avec la méthode MRLens.

6.3 Discussion

Nous venons de voir que WPC permet de discriminer efficacement les 5 modèles cosmologiques. Comme nous l’avons dit précédemment, le formalisme du modèle de halo (Press and Schechter 1974; Sheth and Tormen 1999; Hamana et al. 2004) permet de prédire le nombre d’amas de galaxies contenu dans une fraction du ciel pour un modèle cosmologique donné. Cependant, il faut considérer que seule une partie des amas de galaxies réellement présents dans le ciel va pouvoir être détectée. Il faut en effet considérer les effets de sélection inhérents à la qualité des observations et aux méthodes de traitement de données. Pour cela, une solution qui est souvent utilisée consiste à modéliser les effets de sélection à l’aide d’une fonction qui est appelée ”fonction de sélection”. On peut faire une modélisation analytique en essayant

de considérer tous les effets de sélection. Une autre approche consiste à utiliser une étude Monte-Carlo qui permet de prendre en compte l'ensemble des effets de sélection qui ne sont pas pris en compte dans l'approche analytique. Cette étude sera réalisée prochainement.

Une fois que l'on a déterminé la fonction de sélection, on peut facilement faire le lien entre les résultats observationnels et la théorie. Ce travail débouche naturellement sur l'estimation des paramètres cosmologiques à partir de l'estimation de *WPC*.

D'autre part, disposant d'une discrimination parfaite entre les 5 modèles cosmologiques grâce à *WPC*, on peut déterminer des bornes supérieures pour les erreurs liées à l'estimation des paramètres cosmologiques, en considérant l'espacement entre deux modèles adjacents. Pour des données spatiales couvrant un champ d'environ 4 degrés carrés, la limite supérieure sur l'erreur de σ_8 est entre 5% et 8%, pour un $\sigma_8 \in [0.6, 1]$. De même, pour un $\Omega_m \in [0.23, 0.64]$, la limite supérieure sur l'erreur de Ω_m se situe entre 11% et 12.5%. Dans un futur proche, une estimation des erreurs plus précise sera faite.

6.4 Conclusion

Lorsque l'on cherche à contraindre les paramètres cosmologiques à partir des données de cisaillement gravitationnel, en utilisant uniquement des statistiques à deux points, une dégénérescence entre les paramètres σ_8 et Ω_m apparaît. Dans ce chapitre, nous avons cherché une nouvelle statistique pour briser cette dégénérescence. Pour cela, nous avons utilisé des cartes de convergence simulées correspondant à 5 modèles cosmologiques différents choisis le long de la dégénérescence. Nous avons alors considéré plusieurs statistiques que nous avons estimées dans plusieurs représentations afin de comparer leur taux de discrimination.

Les statistiques à deux points permettent de caractériser un signal Gaussien mais sont inutiles pour discriminer entre des modèles cosmologiques appartenant à la zone de dégénérescence. Pour cela, nous avons considéré uniquement des statistiques qui sont habituellement utilisées pour caractériser la non-Gaussianité du signal à petite échelle.

Les principales conclusions de ce chapitre sont les suivantes :

1. Tout d'abord, nous avons trouvé que la transformation en ondelettes isotropes (la transformation en ondelettes "à trous") est celle qui fournit la meilleure représentation des structures non-Gaussiennes permettant ainsi d'augmenter le taux de discrimination quelle que soit la statistique utilisée.
2. Nous avons alors montré qu'un filtrage en ondelettes tel que le filtrage MRLens favorise les statistiques non-Gaussiennes, en reconstruisant essentiellement les amas de galaxies.
3. Nous avons également introduit une nouvelle statistique, appelée *WPC* (pour Wavelet Peak Counting), obtenue par l'estimation du nombre d'amas pour chaque échelle d'une transformation en ondelettes.
4. Nous avons alors montré que *WPC* est la meilleure des statistiques testées (S , K , HC , PC , B_{κ}^{eq}) et nous avons montré que cette statistique estimée sur des cartes de convergence filtrées par la méthode MRLens permet de discriminer les 5 modèles cosmologiques sélectionnés.

Dans ce chapitre, nous avons comparé, systématiquement, plusieurs statistiques non-Gaussiennes habituellement utilisées ; et *WPC* s'est avéré être la meilleure de ces statistiques. La comparaison ayant été menée uniquement sur des modèles cosmologiques choisis le long de la dégénérescence σ_8 - Ω_m , cette étude montre que le spectre de puissance (ou la fonction de corrélation à deux points) et *WPC* doivent être utilisés simultanément. Cependant, ces deux

statistiques sondent le même champ, par conséquent les corrélations introduites par cette mesure combinée ont besoin d’être considérées (see [Takada and Bridle 2007](#)). L’implémentation de cette méthode combinée est laissée pour plus tard.

Un autre problème que nous avons abordé §6.3 sont les effets de sélection. La détermination de la fonction de sélection, que nous ferons ultérieurement, est nécessaire pour l’estimation des paramètres cosmologiques et pour une estimation plus précise des erreurs.

Finalement, bien que PC et WPC fournissent déjà de bonnes contraintes, d’autres statistiques telles que le nombre d’amas par masse ou encore la corrélation spatiale des amas devraient permettre de contraindre encore mieux le modèle cosmologique. Un travail supplémentaire devra être mené pour exploiter pleinement cette approche.

Conclusion

L'effet de cisaillement gravitationnel, directement sensible au potentiel gravitationnel, est devenu l'un des meilleurs outils pour cartographier la distribution de matière noire et imposer des contraintes sur les paramètres cosmologiques. Cependant, cet effet est difficile à mesurer en raison de sa faiblesse. De nos jours, les efforts se concentrent sur l'optimisation des méthodes de traitement de données afin d'amener les lentilles gravitationnelles faibles vers une cosmologie de précision.

Parmi les outils apparus ces dernières années en traitement de données, l'analyse multi-échelles semble être l'un des plus marquants en astrophysique. Elle permet, en effet, de transformer le signal sous une forme qui permet de mieux l'analyser. Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé de nouveaux outils de traitement, basés essentiellement sur ces méthodes multi-échelles afin d'améliorer plusieurs étapes du traitement des données de cisaillement gravitationnel et ainsi d'affiner la mesure de la distribution de matière noire et des paramètres cosmologiques.

Durant cette thèse, nous nous sommes tout d'abord intéressés à reconstruire une carte de matière noire à partir des effets de lentille gravitationnelle faibles.

Nous avons tout d'abord mené une étude sur la possibilité d'utiliser la flexion pour reconstruire la carte de matière noire et nous avons montré que celle-ci apportait peu par rapport au cisaillement car la mesure de flexion est beaucoup plus bruitée que celle de cisaillement (voir §2.2.3). Nous avons donc utilisé les cartes de cisaillement pour reconstruire la carte de matière noire.

Nous avons également vu que lorsque l'on veut utiliser une méthode globale pour reconstruire la carte de convergence, les données manquantes dans les cartes de cisaillement, posent problèmes (voir §2.4.3). Pour interpoler les données manquantes, nous avons développé une méthode, baptisée FASTLens, basée sur la méthode d'*inpainting* (chapitre IV). Celle-ci permet de reconstruire rapidement une carte de convergence complète directement à partir des données incomplètes de cisaillement. La méthode est disponible sur internet à l'adresse : <http://irfu.cea.fr/Ast/fastlens.software.php>.

Les cartes de matière noire ainsi obtenues par inversion du champ de cisaillement sont très bruitées car la mesure du cisaillement est elle même très bruitée (voir §2.2.3). Pour apporter une solution à ce problème, nous avons proposé une nouvelle méthode de filtrage appelée MRLens, dédiée aux cartes de convergence (chapitre V). Et nous avons montré qu'elle fournit de meilleurs résultats que les méthodes utilisées habituellement (filtre Gaussien, filtre de Wiener, MEM). Elle permet notamment de mieux reconstruire les structures à petite échelle (les amas de galaxies). Un site internet dédié à cette méthode est disponible à l'adresse suivante : <http://irfu.cea.fr/Ast/mrlens.software.php>.

Depuis sa mise en ligne, le code a été plusieurs fois utilisé, notamment sur les données COSMOS, ce qui a permis de reconstruire la carte de matière noire la plus précise à ce jour (voir §5.2). Cette carte de matière noire a entre autres permis de comparer la distribution de matière visible avec celle de matière noire. Le code a également été testé sur la première

carte de convergence simulée de tout le ciel et a montré ses faiblesses pour reconstruire les structures à grande échelle. Une méthode combinée avec le filtre de Wiener a été proposée pour traiter ce type de données très grand champ (voir §5.3).

Dans cette thèse, nous nous sommes ensuite intéressés à l'estimation des paramètres cosmologiques. Pour cela, une analyse statistique des données est nécessaire. Habituellement, cette analyse statistique se fait sur les cartes de cisaillement pour éviter tous les problèmes d'inversion en présence de données manquantes. Il faut toutefois tenir compte des données manquantes présentes dans les cartes de cisaillement. Et pour cette raison, on se limite souvent à l'estimation des statistiques à N points.

Pour contraindre les paramètres cosmologiques à partir des données de cisaillement, on estime essentiellement des statistiques à deux points sur le champ de cisaillement. On trouve alors des dégénérescences entre les paramètres du modèle cosmologique, notamment entre σ_8 et Ω_m (voir §2.4.1). La méthode d'interpolation d'image FASTLens permet d'éviter tous les problèmes liés à l'estimation de statistiques en présence de données manquantes et ainsi d'estimer toutes sortes de statistiques. Nous avons décidé de comparer l'efficacité de plusieurs statistiques sur les cartes de convergence complètes afin de déterminer celle qui discrimine au mieux le modèle cosmologique (chapitre VI).

Nous avons introduit une nouvelle méthode qui permet d'estimer de manière rapide et exacte deux de ces statistiques : le spectre de puissance (P_κ) et le bispectre dans sa configuration équilatérale (B_κ^{eq}). Cette méthode basée sur une transformation de Fourier polaire ne peut être utilisée sur des données incomplètes (voir §2.4.2). La méthode FASTLens rend possible cette estimation rapide. Nous avons montré grâce à des simulations réalistes que l'erreur liée à l'interpolation est au plus de 1% sur l'estimation du spectre de puissance et au plus de 3 % sur l'estimation du bispectre (chapitre IV).

Nous avons introduit également une nouvelle statistique appelée WPC qui permet d'estimer le nombre d'amas par échelle ondelettes (chapitre VI). Finalement, nous avons montré que WPC est la meilleure statistique pour briser la dégénérescence parmi les statistiques considérées (S , K , HC , PC , B_κ^{eq} ...).

*
* *

Finalement, toutes ces nouvelles techniques ont déjà grandement apporté à la qualité de l'analyse des données de cisaillement, et ce, en plusieurs points de la chaîne de traitement. Mais beaucoup reste encore à faire, et pour cela, nous avons encore de nombreuses pistes, notre objectif à terme étant de disposer d'une analyse globale optimisée des données de cisaillement gravitationnel.

1. Les résultats des travaux décrits au chapitre V sur les méthodes de filtrage des cartes de matière noire ont montré que les structures à grande échelle n'étaient pas reconstruites optimalement par les méthodes qui reconstruisaient le mieux les structures à petite échelle et inversement. Afin de tirer parti au mieux des avantages des différentes techniques, nous comptons par exemple coupler le filtre de Wiener avec la méthode MRLens que nous avons développée.
2. Les données actuellement accessibles ne représentent qu'une fraction du ciel, mais bientôt des cartes de tout le ciel seront disponibles. Pour répondre aux exigences futures et exploiter au mieux les futures observations, nous souhaitons étendre notre méthode de filtrage au traitement de données sur la sphère.

3. La qualité des instruments de mesure futurs va permettre de reconstruire des cartes de matière noire tri-dimensionnelles de plus en plus grandes. Pour exploiter aux mieux ces données, nous souhaitons également développer une nouvelle méthode de filtrage 3D pour pouvoir filtrer ces cartes tri-dimensionnelles.
4. Pour compléter l'étude menée au chapitre VI visant à déterminer la meilleure statistique pour contraindre le modèle cosmologique, nous comptons intégrer de nouvelles statistiques à cette comparaison, comme le calcul du bispectre dans sa configuration locale ou le calcul du trispectre qui apporteront peut-être des contraintes plus précises sur les structures non-Gaussiennes.
5. Durant, cette thèse, nous nous sommes concentrés essentiellement sur les méthodes de reconstruction et d'analyse des données de cisaillement gravitationnel. Une étape indispensable est maintenant de nous pencher sur les phases de pré-traitement et sur la mesure du cisaillement à proprement dit, afin de maîtriser toute la chaîne de traitement. Une collaboration avec l'observatoire de Munich est par exemple déjà en cours sur les méthodes de pré-traitement ; et nous comptons nous intéresser prochainement à la mesure du cisaillement en participant au projet GREAT08 (voir §2.1.2).
6. Enfin, et c'est le but ultime de tous ces travaux en traitement de données, nous souhaitons appliquer à des données réelles toutes ces nouvelles méthodes de traitement (MR-Lens, FastLens,...), afin de cartographier la distribution de matière noire avec précision et améliorer nos contraintes sur les paramètres cosmologiques. Un grand nombre de nouveaux instruments sont déjà prévus pour fournir des relevés du ciel, plus grands et plus précis, notamment le projet Euclid auquel participe le CEA qui prévoit d'observer la totalité du ciel.

Annexe

Mes articles

1. **Weak Lensing mass reconstruction using Wavelets**, *J.-L. Starck, S. Pires, A. Réfrégier*, A&A, Vol. 451, p. 1139-1150, 2006.
2. **Sunyaev-Zel'dovich cluster reconstruction in multiband bolometer camera surveys**, *S. Pires, J.-B. Juin, D. Yvon, Y. Moudden, S. Anthoine et E. Pierpaoli*, A&A, Vol. 455, p. 741-755, 2006.
3. **Dark matter maps reveal cosmic scaffolding**, *R. Massey, J. Rhodes, R. Ellis, N. Scoville, A. Leauthaud, A. Finoguenov, P. Capak, D. Bacon, H. Aussel, J.-P. Kneib, A. Koekemoer, H. McCracken, B. Mobasher, S. Pires, A. Réfrégier, S. Sasaki, J.-L. Starck, Y. Taniguchi, A. Taylor, J. Taylor*, Nature, Vol. 445, P ; 286-290, 2007.
4. **Full-sky Weak Lensing Simulation with 70 Billion Particles**, *R. Teyssier, S. Pires, D. Aubert, C. Pichon, S. Prunet, A. Amara, K. Benabed, S. Colombi, A. Réfrégier et J.-L. Starck*, soumis à A&A.
5. **On the contribution of large scale structure to strong gravitational lensing**, *C. Faure, J.-P. Kneib, S. Hilbert, R. Massey, G. Covone, A. Finoguenov, A. Leauthaud, J. E. Taylor, S. Pires, et N. Scoville*, soumis à ApJ.
6. **FASTLens (FAst STatistics for weak Lensing) : Fast method for Weak Lensing Statistics and map making**, *S. Pires, J.-L. Starck, A. Amara, R. Teyssier, A. Réfrégier et J. Fadili*, soumis à MNRAS.
7. **Cosmological models discrimination from Weak Lensing data**, *S. Pires, J.-L. Starck, A. Amara, A. Réfrégier et R. Teyssier*, soumis à A&A.
8. **Handbook for the GREAT08 Challenge : An image analysis competition for cosmological lensing**, *S. Bridle, J. Shawe-Taylor, A. Amara, D. Applegate, S.-T. Balan, G. Bernstein, J. Berge, H. Dahle, T. Erben, M. Gill, A. Heavens, C. Heymans, W. High, H. Hoekstra, M. Jarvis, T. Kitching, J.-P. Kneib, K. Kuijken, D. Lagattuta, R. Mandelbaum, R. Massey, Y. Mellier, B. Moghaddam, Y. Moudden, R. Nakajima, S. Paulin-Henriksson, S. Pires, A. Rassat, A. Refregier, J. Rhodes, T. Schrabback, E. Semboloni, M. Shmakova, L. van Waerbeke, L. Voigt, D. Wittman*, 2008, soumis au réseau PASCAL, arXiv.0802.1214, soumis à Annals of Applied Statistics.

Mes logiciels

1. **MRLens (Multi-Resolution methods for gravitationnal LENSing)**, *S. Pires*, est une méthode de filtrage dédiée aux cartes de matière noire. Le code et une documentation complète sont disponibles à l'adresse : <http://irfu.cea.fr/Ast/mrlens.software.php>.
2. **FASTLens (FAst STatistics for weak Lensing)**, *S. Pires*, propose un outil pour reconstruire des cartes de matière noire complètes à partir de données de cisaillement in-

complètes ainsi qu’une méthode pour estimer le spectre et le bispectre de manière rapide et exacte. Le code est disponible à l’adresse : <http://irfu.cea.fr/Ast/fastlens.software.php>.

Mes Contributions

1. **Summer School, “Wavelet And Multifractal Analysis”**, Institut d’Etude Scientifique de Cargese, Corsica (France), 19-31 Juin, 2004.
2. **Workshop “Contenu informatif des images numeriques”**, ENS Cachan (France), 25-26 Novembre, 2004.
3. **Summer School in Statistics for Astronomers & Physicists, Penn State University (USA)**, 5-17 Juin, 2005.
4. **Advanced Lectures, “a Pan-Chromatic View of Clusters of Galaxies and the Large-Scale Structure”**, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica of Puebla (Mexique), 27 Juin - 8 Juillet, 2005.
5. **Conference, Les rencontres de Moriond : “Contents and structures of the Universe”**, La Thuile (Italie), 18-25 Mars, 2006.
6. **Workshop on Nongaussianity in Cosmology**, Miramare-Trieste (Italie), 24-28 Juillet, 2006.
7. **Conference, ADA IV (Astronomical Data Analysis)**, Marseille (France), 18-20 Septembre, 2006.
8. **Colloque Physique stellaire et cosmologie**, Paris (France), 24-25 Mai, 2007.
9. **Conference, ADA V (Astronomical Data Analysis)**, Heraklion (Crète), 7-9 Mai, 2008.

Mes Séminaires

1. **Séminaire au Service d’Electronique des Détecteurs et Informatique (Sedi) CEA-Saclay** : “Application des méthodes mult-résolution aux effets de lentille gravitationnelle faibles”, 1 Juillet 2004, France.
2. **Seminaire à l’Observatoire de Munich** : “Dark Matter mass map reconstruction and analysis using sparsity”, 18 Juin, 2008, Allemagne.
3. **Seminaire à l’Institut d’Astrophysique de Paris (IAP)** : “Dark Matter mass map reconstruction and analysis using sparsity”, 9 Juillet, 2008, France.

Bibliographie

- P. Abrial, Y. Moudden, J.L. Starck, J. Bobin, J. Fadili, B. Afeyan, and M.K. Nguyen. Morphological Component Analysis and Inpainting on the sphere : Application in Physics and Astrophysics. *Journal of Fourier Analysis and Applications (JFAA)*, 13(6) :729–748, 2007. 99
- N. Aghanim and O. Forni. Searching for the non-Gaussian signature of the CMB secondary anisotropies. *A&A*, 347 :409–418, July 1999. 133
- N. Aghanim, M. Kunz, P. G. Castro, and O. Forni. Non-Gaussianity : Comparing wavelet and Fourier based methods. *A&A*, 406 :797–816, August 2003. doi : 10.1051/0004-6361:20030677. 128
- E. Aubourg and N. Palanque-Delabrouille. A search for Galactic Dark Matter with EROS 2. *New Astronomy*, 4 :265–273, July 1999. doi : 10.1016/S1384-1076(99)00008-1. 18
- A. Averbuch, R.R. Coifman, D.L. Donoho, M. Elad, and M. Israeli. Fast and accurate Polar Fourier transform. *Journal on Applied and Computational Harmonic Analysis ACHA*, December 2005. 52
- D. Babich and M. Zaldarriaga. Primordial bispectrum information from CMB polarization. *Phys. Rev. D*, 70(8) :083005–+, October 2004. doi : 10.1103/PhysRevD.70.083005. 51
- D. Bacon, A. Refregier, and R. Ellis. Detection of Cosmic Shear with the William Herschel Telescope. *MNRAS*, pages 318–625, 2000. 17, 29
- D. J. Bacon, R. J. Massey, A. R. Refregier, and R. S. Ellis. Joint cosmic shear measurements with the Keck and William Herschel Telescopes. *MNRAS*, 344 :673–685, September 2003. 79, 127
- D. J. Bacon, D. M. Goldberg, B. T. P. Rowe, and A. N. Taylor. Weak gravitational flexion. *MNRAS*, 365 :414–428, January 2006. doi : 10.1111/j.1365-2966.2005.09624.x. 24, 25, 39, 40, 41, 42
- N. A. Bahcall and X. Fan. The Most Massive Distant Clusters : Determining Omega and delta 8. *ApJ*, 504 :1–+, September 1998. doi : 10.1086/306088. 132, 138
- M. Bartelmann. Cluster mass estimates from weak lensing. *A&A*, 303 :643–+, November 1995. 38
- M. Bartelmann and P. Schneider. Weak gravitational lensing. *Phys. Rep.*, 340 :291–472, January 2001. 14, 15, 30, 81
- K. Benabed and R. Scoccimarro. The cosmic shear three-point functions. *A&A*, 456 :421–432, September 2006. doi : 10.1051/0004-6361:20054125. 51

- J. Benjamin, C. Heymans, E. Semboloni, L. van Waerbeke, H. Hoekstra, T. Erben, M. D. Gladders, M. Hetterscheidt, Y. Mellier, and H. K. C. Yee. Cosmological constraints from the 100 deg² weak-lensing survey. *MNRAS*, 381 :702–712, October 2007. doi : 10.1111/j.1365-2966.2007.12202.x. 49, 119
- Y. Benjamini and Y. Hochberg. Controlling the false discovery rate - a practical and powerful approach to multiple testing. *J. R. Stat. Soc. B*, 57 :289, 1995. 104, 129
- J. Bergé, F. Pacaud, A. Réfrégier, R. Massey, M. Pierre, A. Amara, M. Birkinshaw, S. Paulin-Henriksson, G. P. Smith, and J. Willis. Combined analysis of weak lensing and X-ray blind surveys. *MNRAS*, pages 218–+, February 2008. doi : 10.1111/j.1365-2966.2008.12902.x. 30, 55, 128
- F. Bernardeau, L. van Waerbeke, and Y. Mellier. Weak lensing statistics as a probe of $\{\Omega_{\text{M}}\}$ and power spectrum. *A&A*, 322 :1–18, June 1997. 30, 51, 52, 127
- F. Bernardeau, Y. Mellier, and L. van Waerbeke. Detection of non-Gaussian signatures in the VIRMOS-DESCART lensing survey. *A&A*, 389 :L28–L32, July 2002. doi : 10.1051/0004-6361:20020700. 58
- F. Bernardeau, L. van Waerbeke, and Y. Mellier. Patterns in the weak shear 3-point correlation function. *A&A*, 397 :405–414, January 2003. doi : 10.1051/0004-6361:20021567. 51, 80
- M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester. Image Inpainting. *Siggraph Computer Graphics Proceedings*, 2000. 82
- E. Bertin and S. Arnouts. SExtractor : Software for source extraction. *A&AS*, 117 :393–404, June 1996. 133
- R. Bolze, F. Cappello, E. Caron, M. Daydé, F. Desprez, E. Jeannot, Y. Jégou, S. Lanteri, J. Leduc, N. Melab, G. Mornet, R. Namyst, P. Primet, B. Quetier, O. Richard, E.-G. Talbi, and Touché I. Grid’5000 : a large scale and highly reconfigurable experimental grid testbed. *International Journal of High Performance Computing Applications*, 20(4) : 481–494, November 2006. 81
- J. R. Bond, A. H. Jaffe, and L. Knox. Estimating the power spectrum of the cosmic microwave background. *Phys. Rev. D*, 57 :2117–2137, February 1998. 56, 80
- T.R. Bontekoe, E. Koper, and D.J.M. Kester. Pyramid maximum entropy images of IRAS survey data. *A&A*, 284 :1037–1053, 1994. 48, 107
- F. Bornemann and T. März. Fast image inpainting based on coherence transport. Technical report, Technische Universität München, February 2006. 82
- C. A. Bouman and K. Sauer. A generalized gaussian image model for edge-preserving MAP estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(3) :296–310, 1993. 107
- T. G. Brainerd, R. D. Blandford, and I Smail. Weak Gravitational Lensing by Galaxies. *AJ*, 466 :623, 1996. 41
- S. Bridle and L. King. Dark energy constraints from cosmic shear power spectra : impact of intrinsic alignments on photometric redshift requirements. *New Journal of Physics*, 9 : 444–+, December 2007. doi : 10.1088/1367-2630/9/12/444. 32

- S. Bridle, J. Shawe-Taylor, A. Amara, D. Applegate, S. T. Balan, G. Bernstein, J. Berge, H. Dahle, T. Erben, M. Gill, A. Heavens, C. Heymans, W. High, H. Hoekstra, M. Jarvis, T. Kitching, J.-P. Kneib, K. Kuijken, D. Lagattuta, R. Mandelbaum, R. Massey, Y. Mellier, B. Moghaddam, Y. Moudden, R. Nakajima, S. Paulin-Henriksson, S. Pires, A. Rassat, A. Refregier, J. Rhodes, T. Schrabback, E. Semboloni, M. Shmakova, L. van Waerbeke, L. Voigt, and D. Wittman. Handbook for the GREAT08 Challenge : An image analysis competition for cosmological lensing. *ArXiv e-prints*, 802, February 2008. 35
- S. L. Bridle, M. P. Hobson, A. N. Lasenby, and R. Saunders. A maximum-entropy method for reconstructing the projected mass distribution of gravitational lenses. *MNRAS*, 299 : 895–903, September 1998. 46
- P. Burt and E.H.. Andelson. The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code. *IEEE Transactions on Communications*, 31 :532–540, 1983. 64
- E. Candès and D. Donoho. Curvelets : A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation of Objects with Edges. In A. Cohen, C. Rabut, and L.L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Fitting : Saint-Malo 1999*, Nashville, TN, 1999a. Vanderbilt University Press. 76, 84
- E. Candès and D. Donoho. ridgelets : a key to higher dimensional intermittency. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 357 :2495–2509, 1999b. 75, 76, 84
- E. Candès and T. Tao. Near optimal signal recovery from random projections : Universal encoding strategies ? Technical report, CalTech, Applied and Computational Mathematics, 2004. 83
- E. Candès and T. Tao. Stable signal recovery from noisy and incomplete observations. Technical report, CalTech, Applied and Computational Mathematics, 2005. 83
- E. Candès, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles : Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. Technical report, CalTech, Applied and Computational Mathematics, 2004. 83
- E. Candès, L. Demanet, D. Donoho, and Y. Lexing. Fast Discrete Curvelet Transforms. *SIAM. Multiscale Model. Simul.*, 5, :861–899, 2006. 76, 84
- Y. Caniou, E. Caron, H. Courtois, B. Depardon, and R. Teyssier. Cosmological simulations using grid middleware. In *Fourth High-Performance Grid Computing Workshop. HPGC'07.*, Long Beach, California, USA., March 26 2007. IEEE. 81
- E. Caron and F. Desprez. Diet : A scalable toolbox to build network enabled servers on the grid. *International Journal of High Performance Computing Applications*, 20(3) :335–352, 2006. 81
- T. Chan and J. Shen. Local inpainting models and tv inpainting. *SIAM J. Appl. Math*, 62 : 1019–1043, 2001. 82
- T. Chan, M. K. Ng, A. C. Yau, and A. M. Yip. Superresolution image reconstruction using fast inpainting algorithms. Technical report, UCLA CAM, February 2006. 82
- P. Charbonnier, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298–311, 1997. 107

- O. Chwolson. Über eine mögliche Form fiktiver Doppelsterne. *Astronomische Nachrichten*, 221 :329–330, 1924. 21
- D. Clowe, A. Gonzalez, and M. Markevitch. Weak-Lensing Mass Reconstruction of the Interacting Cluster 1E 0657-558 : Direct Evidence for the Existence of Dark Matter. *AJ*, 604 : 596–603, April 2004. doi : 10.1086/381970. 12
- P. L. Combettes and V. R. Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 4(4) :1168–1200, 2005. 84
- A. J. Connolly, I. Csabai, A. S. Szalay, D. C. Koo, R. G. Kron, and J. A. Munn. Slicing Through Multicolor Space : Galaxy Redshifts from Broadband Photometry. *AJ*, 110 : 2655–+, December 1995. doi : 10.1086/117720. 30
- A. Cooray and W. Hu. Weak Gravitational Lensing Bispectrum. *ApJ*, 548 :7–18, February 2001. doi : 10.1086/318660. 51, 58
- H. Dahle. The Cluster Mass Function from Weak Gravitational Lensing. *ApJ*, 2006. 127
- I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 :909–996, 1987. 64
- W. de Sitter. Einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences. Third paper. *MNRAS*, 78 :3–28, November 1917. 7
- D. Donoho and J. Jin. Higher criticism for detecting sparse heterogeneous mixtures. *Annals of Statistics*, 32 :962–994, 2004. 127, 132
- D. L. Donoho. Compressed sensing. Technical report, Stanford University, Department of Statistics, 2004. 83
- D. L. Donoho and M. Elad. Maximal sparsity representation via l_1 minimization. *the Proc. Nat. Aca. Sci.*, 100 :2197–2202, 2003. 104
- D.L. Donoho and X. Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47 :2845–2862, 2001. 84
- A.S. Eddington. Joint Eclipse Meeting of the Royal Society and the Royal Astronomical Society. *The Observatory*, 42, 545 :389–398, 1919. 15
- G. Efstathiou. Myths and truths concerning estimation of power spectra : the case for a hybrid estimator. *MNRAS*, 349 :603–626, April 2004. doi : 10.1111/j.1365-2966.2004.07530.x. 58, 80
- A. Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Preussische Akademie der Wissenschaften*, pages 142–152, 1917. 7
- A. Einstein. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der könig. preuss. Akad. der Wissenschaften*, XLIV :778, 1915. 6, 15
- D. J. Eisenstein and W. Hu. Power Spectra for Cold Dark Matter and Its Variants. *ApJ*, 511 :5–15, January 1999. doi : 10.1086/306640. 120
- M. Elad, J.-L. Starck, P. Querre, and D.L. Donoho. Simultaneous Cartoon and Texture Image Inpainting using Morphological Component Analysis (MCA). *J. on Applied and Computational Harmonic Analysis*, 19(3) :340–358, 2005. 83, 84, 89

- D. Esteban and C. Galand. Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2 :191–195, 1977. 64
- M. J. Fadili, J.-L. Starck, and F. Murtagh. Inpainting and zooming using sparse representations. *The Computer Journal*, july 2007. published online. 84
- B. Fort and Y. Mellier. Arc(let)s in clusters of galaxies. *A&A Rev.*, 5 :239–292, 1994. 16
- P. Fosalba, J. Pan, and I. Szapudi. Cosmological Three-Point Function : Testing the Halo Model against Simulations. *ApJ*, 632 :29–48, October 2005. doi : 10.1086/432906. 58
- K. Freese, B. Fields, and D. Graff. Limits on stellar objects as the dark matter of our halo : Nonbaryonic dark matter seems to be required. *Proceedings of the 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology*, 1999. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/9904401>. 11
- A. Friedmann. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10 :377–386, 1922. 7, 8
- L. Fu, E. Semboloni, H. Hoekstra, M. Kilbinger, L. van Waerbeke, I. Tereno, Y. Mellier, C. Heymans, J. Coupon, K. Benabed, J. Benjamin, E. Bertin, O. Doré, M. J. Hudson, O. Ilbert, R. Maoli, C. Marmo, H. J. McCracken, and B. Ménard. Very weak lensing in the CFHTLS wide : cosmology from cosmic shear in the linear regime. *A&A*, 479 :9–25, February 2008. doi : 10.1051/0004-6361:20078522. 49, 50
- Y. Fukuda, T. Hayakawa, E. Ichihara, K. Inoue, K. Ishihara, H. Ishino, Y. Itow, and al. Measurement of the Solar Neutrino Energy Spectrum Using Neutrino-Electron Scattering. *Physical Review Letters*, 82 :2430–2434, March 1999. 12
- P. M. Garnavich, S. Jha, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, A. V. Filippenko, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, A. G. Riess, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, J. Tonry, and S. M. Carroll. Supernova Limits on the Cosmic Equation of State. *AJ*, 509 :74–79, December 1998. doi : 10.1086/306495. 1, 12
- S. Geman and D.E. McClure. Bayesian image analysis : an application to single photon emission tomography. In Amer. Statist. Assoc., editor, *Proc. Statist. Comput. Sect.*, Washington DC, 1985. 107
- C. R. Genovese, N. A. Lazar, and T. Nichols. Thresholding of statistical maps in functional neuroimaging using the false discovery rate. *NeuroImage*, 15(4) :870–878, April 2002. doi : 10.1006/nimg.2001.1037. URL <http://dx.doi.org/10.1006/nimg.2001.1037>. 105
- D. M. Goldberg and D. J. Bacon. Galaxy-Galaxy Flexion : Weak Lensing to Second Order. *ApJ*, 619 :741–748, February 2005. doi : 10.1086/426782. 24, 25, 39
- D. M. Goldberg and A. Leonard. Measuring Flexion. *ApJ*, 660 :1003–1015, May 2007. doi : 10.1086/513137. 39
- P. J. Green. Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(1) :84–93, 1990. 107
- S. F. Gull and J. Skilling. *MEMSYS5 Quantified Maximum Entropy User's Manual*. Royston, England, 1991. 47

- A. Haar. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme [On the theory of orthogonal function systems]. *Mathematische Annalen*, 69 :331–371, 1909. 63
- T. Hamana, S. Miyazaki, K. Shimasaku, H. Furusawa, M. Doi, M. Hamabe, K. Imi, M. Kimura, Y. Komiyama, F. Nakata, N. Okada, S. Okamura, M. Ouchi, M. Sekiguchi, M. Yagi, and N. Yasuda. Cosmic Shear Statistics in the Suprime-Cam 2.1 Square Degree Field : Constraints on OmegaM and sigma8. *ApJ*, 597 :98–110, November 2003. doi : 10.1086/378348. 30, 55
- T. Hamana, M. Takada, and N. Yoshida. Searching for massive clusters in weak lensing surveys. *MNRAS*, 350 :893–913, May 2004. doi : 10.1111/j.1365-2966.2004.07691.x. 52, 127, 132, 139
- F. K. Hansen, K. M. Górski, and E. Hivon. Gabor transforms on the sphere with applications to CMB power spectrum estimation. *MNRAS*, 336 :1304–1328, November 2002. doi : 10.1046/j.1365-8711.2002.05878.x. 57, 80
- T. Hebert and R. Leahy. A generalized EM algorithm for 3-d bayesian reconstruction from poisson data using gibbs priors. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8(2) :194–202, 1989. 103, 107
- C. Heymans, L. Van Waerbeke, D. Bacon, J. Berge, G. Bernstein, E. Bertin, S. Bridle, M. L. Brown, D. Clowe, H. Dahle, T. Erben, M. Gray, M. Hetterscheidt, H. Hoekstra, P. Hudelot, M. Jarvis, K. Kuijken, V. Margoniner, R. Massey, Y. Mellier, R. Nakajima, A. Refregier, J. Rhodes, T. Schrabback, and D. Wittman. The Shear Testing Programme - I. Weak lensing analysis of simulated ground-based observations. *MNRAS*, 368 :1323–1339, May 2006a. doi : 10.1111/j.1365-2966.2006.10198.x. 33
- C. Heymans, M. White, A. Heavens, C. Vale, and L. van Waerbeke. Potential sources of contamination to weak lensing measurements : constraints from N-body simulations. *MNRAS*, 371 :750–760, September 2006b. doi : 10.1111/j.1365-2966.2006.10705.x. 32
- C. M. Hirata and U. Seljak. Intrinsic alignment-lensing interference as a contaminant of cosmic shear. *Phys. Rev. D*, 70(6) :063526–+, September 2004. doi : 10.1103/PhysRevD.70.063526. 32
- E. Hivon, K. M. Górski, C. B. Netterfield, B. P. Crill, S. Prunet, and F. Hansen. MASTER of the Cosmic Microwave Background Anisotropy Power Spectrum : A Fast Method for Statistical Analysis of Large and Complex Cosmic Microwave Background Data Sets. *ApJ*, 567 :2–17, March 2002. doi : 10.1086/338126. 57, 80
- H. Hoekstra, H. K. C. Yee, and M. D. Gladders. Constraints on OmegaM and sigma8 from Weak Lensing in Red-Sequence Cluster Survey Fields. *ApJ*, 577 :595–603, October 2002. doi : 10.1086/342120. 30, 50
- H. Hoekstra, Y. Mellier, L. van Waerbeke, E. Semboloni, L. Fu, M. J. Hudson, L. C. Parker, I. Tereno, and K. Benabed. First Cosmic Shear Results from the Canada-France-Hawaii Telescope Wide Synoptic Legacy Survey. *ApJ*, 647 :116–127, August 2006. doi : 10.1086/503249. 30, 49, 50, 55
- M. Holdschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and Ph. Tchamitchian. A real time algorithm for the Signal Analysis with the help of the wavelet transform. *Wavelets*, pages 286–297, 1989. 73

- A. M. Hopkins, C. J. Miller, A. J. Connolly, C. Genovese, R. C. Nichol, and L. Wasserman. A New Source Detection Algorithm Using the False-Discovery Rate. *AJ*, 123 :1086–1094, February 2002. 105
- E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15 :168–173, March 1929. 1, 7, 8, 13
- J. Irwin and M. Shmakova. Higher moments in weak gravitational lensing and dark matter structures. *New Astronomy Review*, 49 :83–91, May 2005. doi : 10.1016/j.newar.2005.01.032. 39
- B. Jain, U. Seljak, and S. White. Ray-tracing Simulations of Weak Lensing by Large-Scale Structure. *ApJ*, 530 :547–577, February 2000. doi : 10.1086/308384. 119, 121
- A. Jalobeanu. *Models, Bayesian estimation and algorithms for remote sensing data deconvolution*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, December 2001. 108
- M. Jarvis, G. Bernstein, and B. Jain. The skewness of the aperture mass statistic. *MNRAS*, 352 :338–352, July 2004. doi : 10.1111/j.1365-2966.2004.07926.x. 30, 50, 52, 80, 127, 128, 136
- J. Jin, J.-L. Starck, D. L. Donoho, N. Aghanim, and O. Forni. Cosmological non-Gaussian Signature Detection : Comparing performance of Different Statistical Tests. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, Vol. 2005, No 15, page 2470, 15 :2470–+, August 2005. 128
- B. Joachimi and P. Schneider. The removal of shear-ellipticity correlations from the cosmic shear signal via nulling techniques. *A&A*, 488 :829–843, September 2008. doi : 10.1051/0004-6361:200809971. 32
- N. Kaiser and G. Squires. Mapping the dark matter with weak gravitational lensing. *ApJ*, 404 :441–450, February 1993. 43
- N. Kaiser, G. Squires, and T. Broadhurst. A Method for Weak Lensing Observations. *AJ*, 449 :460–+, August 1995. doi : 10.1086/176071. 31, 33, 35
- N. Kaiser, G. Wilson, and G.A. Luppino. Large-Scale Cosmic Shear Measurements. *AJ*, pages 318–625, 2000. 17, 29
- J. Keiner, S. Kunis, and D. Potts. NFFT 3.0 - Tutorial. ., 2006. Online tutorial : <http://www-user.tu-chemnitz.de/~potts/nfft>. 52
- S. M. Kent, R. Bernstein, B. Bigelow, F. Leger, A. Stefanik, T. Abbott, D. Brooks, P. Doel, B. Flaugher, M. Gladders, A. Walker, and S. Worswick. Preliminary Optical and Mechanical Designs for a 2.2 Degree Diameter PrimeFocus Corrector for the Blanco 4 Meter Telescope. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, volume 209 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, pages 154.12–+, December 2006. 55
- M. Kilbinger and P. Schneider. Cosmological parameters from combined second- and third-order aperture mass statistics of cosmic shear. *A&A*, 442 :69–83, October 2005. doi : 10.1051/0004-6361:20053531. 30, 52, 58, 127, 128, 136
- R. Klessen and A. Burkert. Constraints on massive black holes as dark matter candidates using galactic globular clusters. *MON.NOT.ROY.ASTRON.SOC.*, 280 :735, 1996. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/9511032>. 11

- J.-P. Kneib, R. S. Ellis, I. Smail, W. J. Couch, and R. M. Sharples. Hubble Space Telescope Observations of the Lensing Cluster Abell 2218. *ApJ*, 471 :643–+, November 1996. doi : 10.1086/177995. 18
- E. Komatsu, D. N. Spergel, and B. D. Wandelt. Measuring Primordial Non-Gaussianity in the Cosmic Microwave Background. *ApJ*, 634 :14–19, November 2005. doi : 10.1086/491724. 58
- P. Lambert, S. Pires, J. Ballot, R. A. García, J.-L. Starck, and S. Turck-Chièze. Curvet analysis of asteroseismic data. I. Method description and application to simulated sun-like stars. *A&A*, 454 :1021–1027, August 2006. doi : 10.1051/0004-6361:20054541. 76
- G. Lemaitre. Modèle d’univers homogène, de masse constante et de rayon croissant, en accord avec la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, page 49, 1927. 7
- A. Leonard, D. M. Goldberg, J. L. Haaga, and R. Massey. Gravitational Shear, Flexion, and Strong Lensing in Abell 1689. *ApJ*, 666 :51–63, September 2007. doi : 10.1086/520109. 42
- C.-P. Ma and J. N. Fry. Deriving the Nonlinear Cosmological Power Spectrum and Bispectrum from Analytic Dark Matter Halo Profiles and Mass Functions. *ApJ*, 543 :503–513, November 2000a. doi : 10.1086/317146. 58
- C.-P. Ma and J. N. Fry. What Does It Take to Stabilize Gravitational Clustering? *ApJ*, 538 :L107–L111, August 2000b. doi : 10.1086/312819. 58
- K. Maisinger, M. P. Hobson, and A. N. Lasenby. Maximum-entropy image reconstruction using wavelets. *MNRAS*, 347 :339–354, January 2004. 47, 103, 107
- S. Mallat. A theory for Multiresolution Signal Decomposition the wavelet Representation. *IPAMI*, 11 :674–693, 1989. 64, 76, 84
- S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic press, 1999. 70, 73
- R. Maoli, L. Van Waerbeke, Y. Mellier, P. Schneider, B. Jain, F. Bernardeau, T. Erben, and B. Fort. Cosmic shear analysis in 50 uncorrelated VLT fields. Implications for Ω_0 , σ_8 . *A&A*, 368 :766–775, March 2001. 30, 49, 79, 127
- P. J. Marshall, M. P. Hobson, S. F. Gull, and S. L. Bridle. Maximum-entropy weak lens reconstruction : improved methods and application to data. *MNRAS*, 335 :1037–1048, October 2002. 46, 107
- S. Masnou and J.M. Morel. Disocclusion : A variational approach using level lines. *IEEE Trans. Image Process.*, 11(2) :68–76, 2002. 82
- R. Massey, J. Rhodes, A. Refregier, J. Albert, D. Bacon, G. Bernstein, R. Ellis, B. Jain, T. McKay, S. Perlmutter, and A. Taylor. Weak Lensing from Space. II. Dark Matter Mapping. *AJ*, 127 :3089–3101, June 2004. doi : 10.1086/420985. 129
- R. Massey, A. Refregier, D. J. Bacon, R. Ellis, and M. L. Brown. An enlarged cosmic shear survey with the William Herschel Telescope. *MNRAS*, 359 :1277–1286, June 2005. doi : 10.1111/j.1365-2966.2005.09011.x. 55, 79, 127

- R. Massey, C. Heymans, J. Bergé, G. Bernstein, S. Bridle, D. Clowe, H. Dahle, R. Ellis, T. Erben, M. Hetterscheidt, F. W. High, C. Hirata, H. Hoekstra, P. Hudelot, M. Jarvis, D. Johnston, K. Kuijken, V. Margoniner, R. Mandelbaum, Y. Mellier, R. Nakajima, S. Paulin-Henriksson, M. Peebles, C. Roat, A. Refregier, J. Rhodes, T. Schrabback, M. Schirmer, U. Seljak, E. Semboloni, and L. van Waerbeke. The Shear Testing Programme 2 : Factors affecting high-precision weak-lensing analyses. *MNRAS*, 376 :13–38, March 2007a. doi : 10.1111/j.1365-2966.2006.11315.x. 33
- R. Massey, J. Rhodes, R. Ellis, N. Scoville, A. Leauthaud, A. Finoguenov, P. Capak, D. Bacon, H. Aussel, J.-P. Kneib, A. Koekemoer, H. McCracken, B. Mobasher, S. Pires, A. Refregier, S. Sasaki, J.-L. Starck, Y. Taniguchi, A. Taylor, and J. Taylor. Dark matter maps reveal cosmic scaffolding. *Nature*, 445 :286–290, January 2007b. doi : 10.1038/nature05497. 30, 115, 127
- R. Massey, B. Rowe, A. Refregier, D. J. Bacon, and J. Bergé. Weak gravitational shear and flexion with polar shapelets. *MNRAS*, 380 :229–245, September 2007c. doi : 10.1111/j.1365-2966.2007.12072.x. 39
- Y. Mellier. Probing the Universe with Weak Lensing. *ARA&A*, 37 :127–189, 1999. doi : 10.1146/annurev.astro.37.1.127. 14, 30
- Y. Mellier and L. van Waerbeke. Cosmological weak lensing . *Classical and Quantum Gravity*, 19 :3505–3515, July 2002. 55
- R. B. Metcalf and J. Silk. New constraints on macroscopic compact objects as a dark matter candidate from gravitational lensing of type ia supernovae. *Physical Review Letters*, 98 :099903, 2007. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/0612253>. 11
- Y. Meyer. Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algebres d’operateurs. *Seminaire Bourbaki.*, 145-146 :209–223, 1985-86. 64
- M. Milgrom. MOND-theoretical aspects. *New Astronomy Review*, 46 :741–753, November 2002. 12, 14
- C. J. Miller, C. Genovese, R. C. Nichol, L. Wasserman, A. Connolly, D. Reichart, A. Hopkins, J. Schneider, and A. Moore. Controlling the False-Discovery Rate in Astrophysical Data Analysis. *AJ*, 122 :3492–3505, December 2001. 105
- S. Miyazaki, T. Hamana, K. Shimasaku, H. Furusawa, M. Doi, M. Hamabe, K. Imi, M. Kimura, Y. Komiyama, F. Nakata, N. Okada, S. Okamura, M. Ouchi, M. Sekiguchi, M. Yagi, and N. Yasuda. Searching for dark matter halos in the supprime-cam 2 sq deg field. *The Astrophysical Journal*, 580 :L97, 2002. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/0210441>. 128
- A. W. Moore, A. J. Connolly, C. Genovese, A. Gray, L. Grone, N. I. Kanidoris, R. C. Nichol, J. Schneider, A. S. Szalay, I. Szapudi, and L. Wasserman. Fast Algorithms and Efficient Statistics : N-Point Correlation Functions. In A. J. Bandy, S. Zaroubi, and M. Bartelmann, editors, *Mining the Sky*, pages 71–+, 2001. 50
- J. Morlet and D. Grossman. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math.*, 15 :723–736, 1984. 63

- D. Munshi, P. Valageas, L. van Waerbeke, and A. Heavens. Cosmology with weak lensing surveys, 2006. URL <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/0612667>. 14, 30
- F. Murtagh, J.-L. Starck, and A. Bijaoui. Image restoration with noise suppression using a multiresolution support. *A&AS*, 112 :179–189, 1995. 104
- R. Narayan and R. Nityananda. Maximum entropy image restoration in astronomy. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 24 :127–170, 1986. 48
- Y. Okura, K. Umetsu, and T. Futamase. A Method for Weak Lensing Flexion Analysis by the HOLICs Moment Approach. *ArXiv e-prints*, 710, October 2007. 39, 40, 42
- E. Pantin and J.-L. Starck. Deconvolution of astronomical images using the multiscale maximum entropy method. *A&AS*, 315 :575–585, 1996. 48, 102, 103, 104
- R. Pello, J. M. Miralles, J.-F. Le Borgne, J.-P. Picat, G. Soucail, and G. Bruzual. Identification of a high redshift cluster. in the field of Q2345+007 through deep BRIJK’ photometry. *A&A*, 314 :73–86, October 1996. 30
- U.-L. Pen, T. Lu, L. van Waerbeke, and Y. Mellier. The three-dimensional power spectrum of dark and luminous matter from the VIRMOS-DESCART cosmic shear survey. *MNRAS*, 346 :994–1008, December 2003. 80, 127
- A. A. Penzias and R. W. Wilson. Measurement of the Flux Density of CAS a at 4080 Mc/s. *AJ*, 142 :1149–+, October 1965. 1, 8
- S. Perlmutter, G. Aldering, M. della Valle, S. Deustua, R. S. Ellis, S. Fabbro, A. Fruchter, G. Goldhaber, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, R. A. Knop, C. Lidman, R. G. McMahon, P. Nugent, R. Pain, N. Panagia, C. R. Pennypacker, P. Ruiz-Lapuente, B. Schaefer, and N. Walton. Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe. *Nature*, 391 :51–+, January 1998. 1, 12
- P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639, 1990. 107
- S. Pires, J. B. Juin, D. Yvon, Y. Moudden, S. Anthoine, and E. Pierpaoli. Sunyaev-Zel’dovich cluster reconstruction in multiband bolometer camera surveys. *A&A*, 455 :741–755, August 2006. 115
- S. Pires, J.-L. Starck, A. Amara, A. Réfrégier, and R. Teyssier. Cosmological models discrimination from weak lensing data. *submitted to A&A*, 2008a. 128
- S Pires, J.L. Starck, A. Amara, R. Teyssier, J. Fadili, and A. Refregier. FASTLens (Fast STatistics for weak Lensing) : Fast method for Weak Lensing Statistics and map making. *submitted to MNRAS*, 2008b. 49, 98, 133
- W. H. Press and P. Schechter. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *ApJ*, 187 :425–438, February 1974. 139
- A. Refregier. Shapelets : I. A Method for Image Analysis. *MNRAS*, 338 :35–47, January 2003a. 32, 34
- A. Refregier. Weak Gravitational Lensing by Large-Scale Structure. *ARA&A*, 41 :645–668, 2003b. doi : 10.1146/annurev.astro.41.111302.102207. 14, 18, 30, 31, 48

- A. Refregier and D. Bacon. Shapelets : II. A Method for Weak Lensing Measurements. *MNRAS*, 338 :48–56, 2003. 32, 34
- A. Refregier, J. Rhodes, and E. J. Groth. Cosmic Shear and Power Spectrum Normalization with the Hubble Space Telescope. *APJL*, 572 :L131–L134, June 2002. 30, 79, 127
- J. Rhodes, A. Refregier, and E. J. Groth. Weak Lensing Measurements : A Revisited Method and Application to Hubble Space Telescope Images. *ApJ*, 536 :79–100, June 2000. doi : 10.1086/308902. 31, 115
- A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *AJ*, 116 :1009–1038, September 1998. doi : 10.1086/300499. 1, 12
- J. E. Ruhl, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, C. R. Contaldi, B. P. Crill, P. de Bernardis, G. De Troia, K. Ganga, M. Giacometti, E. Hivon, V. V. Hristov, A. Iacoangeli, A. H. Jaffe, W. C. Jones, A. E. Lange, S. Masi, P. Mason, P. D. Mauskopf, A. Melchiorri, T. Montroy, C. B. Netterfield, E. Pascale, F. Piacentini, D. Pogosyan, G. Polenta, S. Prunet, and G. Romeo. Improved Measurement of the Angular Power Spectrum of Temperature Anisotropy in the Cosmic Microwave Background from Two New Analyses of BOOMERANG Observations. *ApJ*, 599 :786–805, December 2003. doi : 10.1086/379345. 56, 80
- P. Schneider. Detection of (dark) matter concentrations via weak gravitational lensing. *MNRAS*, 283 :837–853, December 1996. 50
- P. Schneider and M. Lombardi. The three-point correlation function of cosmic shear. I. The natural components. *A&A*, 397 :809–818, January 2003. doi : 10.1051/0004-6361:20021541. 51
- P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco. *Gravitational Lenses*. Gravitational Lenses, XIV, 560 pp. 112 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library, 1992. 19
- P. Schneider, L. van Waerbeke, B. Jain, and G. Kruse. A new measure for cosmic shear. *MNRAS*, 296 :873–892, June 1998. 50
- P. Schneider, M. Kilbinger, and M. Lombardi. The three-point correlation function of cosmic shear. II. Relation to the bispectrum of the projected mass density and generalized third-order aperture measures. *A&A*, 431 :9–25, February 2005. doi : 10.1051/0004-6361:20034217. 51
- T. Schramm and R. Kayser. The complex theory of gravitational lensing. Beltrami equation and cluster lensing. *A&A*, 299 :1–+, July 1995. 25
- K. Schwarzschild. On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein’s Theory. *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin,1907*, pages 189–196, 1916. 7
- R. Scoccimarro and H. M. P. Couchman. A fitting formula for the non-linear evolution of the bispectrum. *MNRAS*, 325 :1312–1316, August 2001. doi : 10.1046/j.1365-8711.2001.04281.x. 58

- R. Scoccimarro, S. Colombi, J. N. Fry, J. A. Frieman, E. Hivon, and A. Melott. Nonlinear Evolution of the Bispectrum of Cosmological Perturbations. *ApJ*, 496 :586–+, March 1998. doi : 10.1086/305399. 58
- S. Seitz and P. Schneider. Cluster lens reconstruction using only observed local data : an improved finite-field inversion technique. *A&A*, 305 :383–+, January 1996. 36
- E. Semboloni, Y. Mellier, L. van Waerbeke, H. Hoekstra, I. Tereno, K. Benabed, S. D. J. Gwyn, L. Fu, M. J. Hudson, R. Maoli, and L. C. Parker. Cosmic shear analysis with CFHTLS deep data. *A&A*, 452 :51–61, June 2006. doi : 10.1051/0004-6361:20054479. 30, 50
- I. Shapiro. Fourth Test of Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 13, 26 :789–791, 1964. 26
- Y. Sheng. *The transforms and applications handbook The Electrical Engineering Handbook Series*. CRC Press, 1996. 68
- M.J. Shensa. The discrete wavelet transform : Wedding the a trous and Mallat algorithms. *Proc. IEEE Trans. Signal Process.*, pages 2464–2482, 1992. 73
- R. K. Sheth and G. Tormen. Large-scale bias and the peak background split. *MNRAS*, 308 : 119–126, September 1999. 139
- E. Slezak, F. Durret, and D. Gerbal. A wavelet analysis search for substructures in eleven X-ray clusters of galaxies. *AJ*, 108 :1996–2008, December 1994. doi : 10.1086/117212. 72
- G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, E. L. Wright, J. Aymon, N. W. Boggess, E. S. Cheng, G. de Amici, S. Gulkis, M. G. Hauser, G. Hinshaw, P. D. Jackson, M. Janssen, E. Kaita, T. Kelsall, P. Keegstra, C. Lineweaver, K. Loewenstein, P. Lubin, J. Mather, S. S. Meyer, S. H. Moseley, T. Murdock, L. Rokke, R. F. Silverberg, L. Tenorio, R. Weiss, and D. T. Wilkinson. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *ApJ*, 396 :L1–L5, September 1992. doi : 10.1086/186504. 8
- D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Determination of Cosmological Parameters. *ApJS*, 148 :175–194, September 2003. doi : 10.1086/377226. 12
- D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H. V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Implications for Cosmology. *ApJS*, 170 :377–408, June 2007. doi : 10.1086/513700. 120, 121
- J.-L. Starck and F. Murtagh. *Astronomical Image and Data Analysis*. Springer-Verlag, 2002. 46, 72, 74, 102
- J.-L. Starck, F. Murtagh, and A. Bijaoui. *Image Processing and Data Analysis : The Multiscale Approach*. Cambridge University Press, 1998. 102
- J.-L. Starck, F. Murtagh, P. Querre, and F. Bonnarel. Entropy and astronomical data analysis : Perspectives from multiresolution analysis. *A&A*, 368 :730–746, 2001. 46, 48, 102, 103

- J. L. Starck, E. J. Candès, and D. L. Donoho. The Curvelet Transform for Image Denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11 :670–684, 2002. 76
- J. L. Starck, D. L. Donoho, and E. J. Candès. Astronomical image representation by the curvelet transform. *A&A*, 398 :785–800, February 2003. doi : 10.1051/0004-6361:20021571. 76
- J.-L. Starck, N. Aghanim, and O. Forni. Detection and discrimination of cosmological non-Gaussian signatures by multi-scale methods. *A&A*, 416 :9–17, March 2004a. doi : 10.1051/0004-6361:20040067. 133
- J.-L. Starck, M. Elad, and D.L. Donoho. Redundant multiscale transforms and their application for morphological Component Analysis. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 132 :287–348, 2004b. 76, 83, 84, 99
- J.-L. Starck, Y. Moudden, P. Abrial, and M. Nguyen. Wavelets, ridgelets and curvelets on the sphere. *A&A*, 446 :1191–1204, February 2006a. doi : 10.1051/0004-6361:20053246. 122
- J.-L. Starck, S. Pires, and A. Réfrégier. Weak lensing mass reconstruction using wavelets. *A&A*, 451 :1139–1150, June 2006b. doi : 10.1051/0004-6361:20052997. 36, 92, 106, 129, 135
- I. Szapudi, S. Prunet, and S. Colombi. Fast Analysis of Inhomogenous Megapixel Cosmic Microwave Background Maps. *ApJ*, 561 :L11–L14, November 2001a. doi : 10.1086/324312. 57, 80
- I. Szapudi, S. Prunet, D. Pogossyan, A. S. Szalay, and J. R. Bond. Fast Cosmic Microwave Background Analyses via Correlation Functions. *ApJ*, 548 :L115–L118, February 2001b. doi : 10.1086/319105. 57, 58, 80
- I. Szapudi, J. Pan, S. Prunet, and T. Budavári. Fast Edge-corrected Measurement of the Two-Point Correlation Function and the Power Spectrum. *ApJ*, 631 :L1–L4, September 2005. doi : 10.1086/496971. 57, 58, 80
- M. Takada and S. Bridle. Probing dark energy with cluster counts and cosmic shear power spectra : including the full covariance. *New Journal of Physics*, 9 :446–+, December 2007. doi : 10.1088/1367-2630/9/12/446. 141
- M. Takada and B. Jain. Three-point correlations in weak lensing surveys : model predictions and applications. *MNRAS*, 344 :857–886, September 2003. doi : 10.1046/j.1365-8711.2003.06868.x. 51, 127
- M. Takada and B. Jain. Cosmological parameters from lensing power spectrum and bispectrum tomography. *MNRAS*, 348 :897–915, March 2004. doi : 10.1111/j.1365-2966.2004.07410.x. 51
- M. Tegmark. How to measure CMB power spectra without losing information. *Phys. Rev. D*, 55 :5895–5907, May 1997. 56, 80
- R. Teyssier. Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement. A new high resolution code called RAMSES. *A&A*, 385 :337–364, april 2002. doi : 10.1051/0004-6361:20011817. 80, 120, 128
- R. Teyssier, S. Pires, D. Aubert, C. Pichon, S. Prunet, A. Amara, K. Benabed, S. Colombi, A. Refregier, and J.-L. Starck. Full-sky Weak Lensing Simulation with 70 Billion Particles. *submitted to A&A*, 2008. 115, 119, 121

- E. Thiébaut and L. Mugnier. Maximum a posteriori planet detection and characterization with a nulling interferometer. In C. Aime and F. Vakili, editors, *IAU Colloq. 200 : Direct Imaging of Exoplanets : Science Techniques*, pages 547–552, 2006. doi : 10.1017/S1743921306009938. 46
- K. Umetsu and T. Broadhurst. Combining Lens Distortion and Depletion to Map the Mass Distribution of A1689. *ArXiv e-prints*, 712, December 2007. 24
- C. Vale and M. White. Simulating Weak Lensing by Large-Scale Structure. *ApJ*, 592 : 699–709, August 2003. doi : 10.1086/375867. 36, 37, 81, 108, 109
- L. Van Waerbeke, Y. Mellier, T. Erben, J.C. Cuillandre, and F. et al Bernardeau. Detection of correlated galaxy ellipticities from CFHT data : first evidence for gravitational lensing by large-scale structures. *A&A*, page 318 :30, 2000. 17, 29
- L. Van Waerbeke, T. Hamana, R. Scoccimarro, S. Colombi, and F. Bernardeau. Weak lensing predictions at intermediate scales. *MNRAS*, 322 :918–926, April 2001. doi : 10.1046/j.1365-8711.2001.04241.x. 121
- L. Van Waerbeke, Y. Mellier, R. Pelló, U.-L. Pen, H. J. McCracken, and B. Jain. Likelihood analysis of cosmic shear on simulated and VIRMOS-DESCART data. *A&A*, 393 :369–379, October 2002. doi : 10.1051/0004-6361:20020932. 50
- J. Verdera, V. Caselles, M. Bertalmio, and G. Sapiro. Inpainting surface holes. *IEEE ICIP'98 Chicago USA*, 2 :903–906, 2003. 82
- D. Walsh, R.F. Carswell, and R.J. Weymann. 0957+561A, B :twin quasistellar objects or gravitational lens ? *Nature*, 279 :381, 1979. 16, 18
- N. Weir. Application of maximum entropy techniques to HST data. In *3rd ESO/ST-ECF Data Analysis Workshop*, 1991. 106
- N. Weir. A multi-channel method of maximum entropy image restoration. In D.M. Worrall, C. Biemesderfer, and J. Barnes, editors, *Astronomical Data Analysis Software and System 1*, pages 186–190. Astronomical Society of the Pacific, 1992. 48, 106
- M. White and C. Vale. Simulations of weak gravitational lensing. *Astroparticle Physics*, 22 : 19–27, October 2004. doi : 10.1016/j.astropartphys.2004.05.002. 119, 121
- D.M. Wittman, J.A. Tyson, I. Kirkman, D. and Dell'Antonio, and G. Bernstein. Detection of weak gravitational lensing distortions of distant galaxies by cosmic dark matter at large scales. *Nature*, page 405 :143, 2000. 17, 29
- A. P. S. Yadav, E. Komatsu, B. D. Wandelt, M. Liguori, F. K. Hansen, and S. Matarrese. Fast Estimator of Primordial Non-Gaussianity from Temperature and Polarization Anisotropies in the Cosmic Microwave Background II : Partial Sky Coverage and Inhomogeneous Noise. *ArXiv e-prints*, 711, November 2007. 58
- L. L. Zhang and U.-L. Pen. Fast n-point correlation functions and three-point lensing application. *Nature*, 10 :569–590, 2005. 50
- F. Zwicky. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *AJ*, 86 :23, 1937. 1, 10